



# Quelques aspects du formage électromagnétique des surfaces libres. Applications et hydrodynamique.

Rémy de Framont

## ► To cite this version:

Rémy de Framont. Quelques aspects du formage électromagnétique des surfaces libres. Applications et hydrodynamique.. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1985. Français. NNT: . tel-01339968

**HAL Id: tel-01339968**

**<https://hal.science/tel-01339968>**

Submitted on 30 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Etzel*

# THÈSE

présentée par

**Rémy De FRAMOND**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR**

**de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**

(Arrêté ministériel du 5 Juillet 1984)

(Spécialité : Energétique Physique)

---

## **QUELQUES ASPECTS DU FORMAGE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DES SURFACES LIBRES. APPLICATIONS ET HYDRODYNAMIQUE.**

---

Date de soutenance : 12 Novembre 1985

Composition du Jury :

M. R. MOREAU	Président
M. J.-C. BAVAY	Rapporteurs
M. J.-P. BRANCHER	
M. M. GARNIER	Examineurs
M. R. PERRET	

Thèse préparée au sein de l'Institut de Mécanique  
de GRENOBLE

Mes sincères remerciements à tous ceux qui ont participé  
-sous quelque forme que ce soit- à l'élaboration de ce travail

oooo

Revue de Fraemont  
Quelques aspects du ~~brassage~~  
formage électromagnétique  
des surfaces libres.  
applications et hydrodynamique.

(octobre 1984)

Mes sincères remerciements à tous ceux qui ont participé  
-sous quelque forme que ce soit- à l'élaboration de ce travail

oooo





## S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 : ELEMENTS DE BASE .....	4
I - Rappel des équations de base et hypothèses de travail .....	5
II - Equilibre de la surface libre .....	9
CHAPITRE 2 : FORMAGE ET STABILISATION D'UNE LAME .....	12
INTRODUCTION .....	13
I - Procédé de formage de lames liquides .....	17
II - Stabilisation .....	20
II-1. Position du problème .....	20
II-2. Etude de la stabilité .....	21
II-3. Résultats .....	25
III - Expériences .....	28
III-1. L'inducteur .....	28
III-2. Le dispositif d'étude .....	30
III-3. Résultat de la configuration du champ magnétique .....	32
III-4. Etude du formage et de la stabilité .....	37
1. L'installation .....	37
2. Guidage et stabilisation de lames .....	39
CHAPITRE 3 : FORMAGE DE PROFILES CRUCIFORMES ET MOUVEMENT INTERNE DU FLUIDE .....	47
I - Formage de profilés .....	49
I-1. Position du problème .....	49
I-2. Méthode variationnelle .....	50
I-3. Calcul de profilés cruciformes .....	51
I-4. Approximation lorsque k est élevé .....	54
I-5. Expérimentation .....	55
I-6. Résultats .....	58
I-7. Conclusion .....	70

.../...

II - Etude de stabilité globale .....	71
II-1. Position du problème .....	71
II-2. Cas du carré : $a = b$ .....	71
II-3. Cas du rectangle : $a \neq b$ .....	74
II-4. Conclusion .....	76
III - Mouvement du fluide	
III-1. Résolution analytique	
1. Equation de la vorticité .....	78
2. Résolution dans le cas de tension superficielle infinie	80
III-2. Résolution du problème	
1. Flux Expert .....	85
2. Les équations générales - Méthode de Galerkin .....	87
3. Equations découplées .....	90
4. Equations couplées .....	94
5. Contrainte tangentielle à la surface libre .....	95
6. Profilés cruciformes .....	97
7. Conclusion .....	103
CONCLUSION .....	105
ANNEXE : ORGANIGRAMME DETAILLE DU CALCUL DE FORMAGE .....	108

o o o o

## NOTATIONS

$\vec{A}$	: Potentiel vecteur
$\vec{B}$	: Induction magnétique
$\vec{E}$	: Champ électrique
$\vec{j}$	: Densité de courant
$k$	: Rapport entre les forces de tension superficielle et les forces électromagnétiques.
$\vec{k}$	: Vecteur d'onde associé à une perturbation
$L$	: Longueur caractéristique
$M$	: Nombre de Hartmann
$N$	: Rapport entre les forces d'inertie et les forces électromagnétiques
$\vec{n}$	: Normale extérieur à la surface
$P$	: Pression
$q$	: Débit du fluide
$R$	: Rayon de courbure du jet
$Re$	: Nombre de Reynolds
$Rm$	: Nombre de Reynolds magnétique
$R\omega$	: Paramètre d'écran
$W$	: Nombre de Weber
$\gamma$	: Tension superficielle
$\delta$	: Epaisseur de peau électromagnétique
$\mu$	: Perméabilité magnétique
$\nu$	: Viscosité cinématique
$\psi$	: Fonction de courant
$\rho$	: Masse volumique
$\sigma$	: Conductivité électrique
$\omega$	: Fréquence complexe associée à une perturbation
$\vec{\omega}$	: Vecteur tourbillon.

-----



1.

## INTRODUCTION

o o o o



La magnétohydrodynamique étudie les interactions électromagnétiques dans les fluides conducteurs. Ces interactions sont complexes. En effet, les courants électriques de densité  $\vec{j}$ , qu'ils soient obtenus par conduction ou par induction, soumis à un champ magnétique  $\vec{B}$  font apparaître dans le fluide des forces volumiques de Laplace  $\vec{j} \wedge \vec{B}$ . Ces efforts supplémentaires modifient l'écoulement et éventuellement la forme du fluide si une partie de sa frontière est libre. Il en résulte une modification des courants et du champ magnétique qu'ils induisent. La modélisation complète des phénomènes engendrés conduit à un problème mathématique trop compliqué pour être résolu dans le cas général.

Cependant, certains cas conduisent à des problèmes simplifiés dans lesquels les différents effets sont au moins partiellement découplés, et qui peuvent être abordés par des méthodes analytiques, semi-analytiques ou numériques, de mise en oeuvre raisonnable. Ainsi il nous faut définir le cadre de notre étude et les approximations du modèle avec les ordres de grandeurs des différents paramètres contrôlables ou imposables.

Nous nous plaçons ici dans les conditions définies par les applications de la MHD à la métallurgie. L'utilisation des champs magnétiques alternatifs permet d'induire dans un milieu conducteur de l'électricité, et sans aucun contact, des forces importantes de brassage ou de pression. En plus de l'effet Joule créé par les courants induits dans le métal, ce phénomène est mis à profit dans des applications industrielles tels que le brassage dans les fours à induction (1), le formage à l'état liquide (2), la lévitation (3), le guidage et le confinement (4), la stabilisation (5), etc...

Nous présentons une étude à caractère théorique et expérimentale portant sur le formage électromagnétique de lames et de profilés cruciformes métalliques. Ce problème à frontière libre est étudié dans le cas suivant :



- . Fluide isovolume et température uniforme,
- . Nombre de Reynolds magnétique faible,
- . Epaisseur de peau électromagnétique faible devant la longueur caractéristique du système.

Différents auteurs se sont intéressés récemment à des problèmes du même type et ont proposé des méthodes de résolution. Pour les problèmes de lévitation, on peut citer OKRESS (6), SNEYD et MOFFATT (7), MESTEL (8), BRANCHER et GAGNOUD (9). Pour le formage, on signalera les travaux de SHERCLIFF (10), GARNIER et ETAY (11), BRANCHER et SERO-GUILLAUME (12).

Dans le premier chapitre, on fait un rappel des éléments de base et des hypothèses de travail spécifiques à notre problème. Les deux chapitres suivants concernent deux applications particulières du formage électromagnétique : lames et profilés cruciformes. Le Chapitre II concernant le formage de lames propose principalement une étude expérimentale de faisabilité pour un procédé industriel d'élaboration de métaux amorphes. Le calcul du formage, déjà traité par d'autres auteurs n'est pas abordé dans ce chapitre : par contre, une étude théorique de l'action du champ magnétique sur la stabilité du jet est développée. Le Chapitre III est une étude complète sur le formage de profilés cruciformes : calcul de la configuration d'équilibre et comparaison avec l'expérience, étude de la stabilité globale et enfin, calcul du mouvement de brassage dans une section du jet mis en forme.

# C H A P I T R E 1

---

## ELEMENTS DE BASE

o o o o



## I - RAPPEL DES EQUATIONS DE BASE ET HYPOTHESES DE TRAVAIL

Le champ magnétique dans le milieu conducteur en mouvement obéit aux équations de Maxwell et à la loi d'Ohm généralisée. Pour un bon conducteur, on écrit :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu \vec{j} & \vec{j} &= \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \end{aligned}$$

où  $\vec{E}$  caractérise le champ électrique,  $\vec{B}$  l'induction magnétique,  $\vec{j}$  la densité de courant,  $\vec{V}$  la vitesse du fluide et  $\mu$  la perméabilité magnétique ; la conductivité  $\sigma$  est considérée comme indépendante du champ magnétique.

Pour un fluide isovolume, en écoulement isotherme, l'hydrodynamique se traduit par les équations de continuité et de Navier-Stokes où la densité volumique des forces extérieures est modifiée par le terme électromagnétique :

$$\text{div } \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{P} + \frac{1}{\rho} (\vec{j} \wedge \vec{B}) + \nu \Delta \vec{V}$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\hat{P}$  la pression motrice prenant en compte la gravité et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

L'ensemble de ces équations forment un système implicitement simplifié. En particulier, on ne tient pas compte du phénomène de transfert thermique (13,14,15).

### L'équation de l'induction

La loi d'Ohm, alliée aux équations de Maxwell, conduit à l'équation du champ magnétique ; c'est l'équation de l'induction :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \vec{B} + \vec{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B})$$

Cette équation traduit le fait que la variation du champ magnétique  $\vec{B}$  en fonction du temps résulte des contributions -d'une part, d'un effet de diffusion, d'autre part d'un effet de convection-par le fluide en mouvement. On notera l'analogie avec l'équation du tourbillon en hydrodynamique.

Il est intéressant de faire apparaître les paramètres adimensionnels qui rendent compte par leur ordre de grandeur de l'importance relative des deux mécanismes physiques; si  $L$  et  $T$  sont la longueur et le temps caractéristiques du système et du phénomène étudié, l'équation de l'induction s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$R_\omega \frac{\partial \vec{b}}{\partial \tau} = \Delta \vec{b} + R_m \vec{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B})$$

où  $R_m$  et  $R_\omega$  sont deux paramètres adimensionnels :

$R_m = \mu\sigma VL$  est le nombre de Reynolds magnétique. Il traduit l'importance relative du phénomène de convection vis à vis du phénomène de diffusion. A l'échelle du laboratoire ce nombre est souvent petit devant l'unité.

$R_\omega = \mu\sigma L^2/T$  est le paramètre d'écran. Analogue à un nombre de Reynolds magnétique, il est lié à la non stationnarité du champ magnétique et traduit cette importance vis à vis de l'effet de diffusion.

Lorsque le temps caractéristique  $T$  de l'évolution du système correspond au temps de transit des particules fluides, on a  $T = L/V$  c'est-à-dire  $R_\omega$  de l'ordre de  $R_m$ . En astrophysique le nombre de Reynolds magnétique peut être grand devant l'unité, c'est-à-dire que l'effet de diffusion est faible devant l'effet de convection.

Lorsque le champ magnétique est alternatif de pulsation  $\omega$ , le temps caractéristique  $T$  de l'évolution du système est  $\omega^{-1}$ . A l'échelle du laboratoire où  $R_m \ll 1$ , l'équation de l'induction devient :

$$R_{\omega} \frac{\partial \vec{b}}{\partial \tau} = \Delta \vec{b}$$

et l'équilibre du mouvement s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \nabla \hat{p} + \frac{M^2}{Re} (\vec{j} \wedge \vec{b}) + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v}$$

où  $Re = \frac{VL}{\nu}$  est le nombre de Reynolds ; il exprime le rapport entre les forces d'inertie et de viscosité.

$M = BL \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$  est le nombre de Hartmann ; il exprime le rapport entre les forces électromagnétiques et visqueuses.

L'équation de la diffusion électromagnétique sous forme adimensionnelle détermine la longueur caractéristique associée à la variation spatiale du champ magnétique alternatif. En effet,  $R_{\omega}$  est de l'ordre de l'unité d'où l'échelle de longueur caractéristique  $\delta$ . Ceci traduit le fait que les variations du champ électromagnétique  $\vec{B}$  sont situées dans l'épaisseur de la couche de diffusion limitée à la périphérie du volume électroconducteur ; cette longueur caractéristique  $\delta$  est appelée épaisseur de peau électromagnétique

$$\delta = \sqrt{2/\mu \sigma \omega}$$

### Les forces électromagnétiques

Dans un métal liquide circulant dans une région où existe un champ magnétique, prennent naissance des forces électromagnétiques : par unité de volume  $\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ . Dans notre étude les densités de courant créés par le mouvement du fluide en présence du champ magnétique sont négligées par rapport à celles induites par les variations du champ magnétique alternatif ( $R_m \ll 1$ ). L'ordre de grandeur de la densité de courant est connue par  $\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{j}$ , c'est-à-dire de l'ordre de  $B/\mu \delta$ , d'où l'ordre de grandeur des forces électromagnétiques par unité de volume :

$$F \sim j \cdot B \sim B^2 (\sigma \omega / \mu)^{1/2}$$

On peut décomposer la force de Laplace en deux termes, l'un irrotationnel, l'autre rotationnel :

$$\vec{F} = - \vec{\nabla} \frac{B^2}{2\mu} + \frac{1}{\mu} (\vec{B} \vec{\nabla}) \vec{B}$$

Le premier terme est assimilable au gradient d'une pression lorsque  $\delta/L \ll 1$ , la dimension qui le caractérise est l'épaisseur de peau électromagnétique  $\delta$  puisque les variations normales à la couche de diffusion électromagnétique sont prépondérantes. Le deuxième est un terme déviatoire lié à la variation du champ magnétique le long de la couche ; sa dimension caractéristique est celle du domaine considéré  $L$ .

Le rapport de ces deux types de force à pour ordre de grandeur :

$$\frac{F_{\text{irrot}}}{F_{\text{rot}}} \sim \frac{B^2/\mu\delta}{B^2/\mu L} \sim R_{\omega}^{1/2} \sim \omega^{1/2}$$

c'est-à-dire que pour une pulsation  $\omega$  faible, les forces irrotationnelles de pression interviennent au même titre que les forces rotationnelles responsables de la mise en mouvement du fluide, comme dans le cas du brassage des métaux liquides dans les fours à induction.

Pour une pulsation  $\omega$  élevée, les forces de Laplace se caractérisent surtout par des forces volumiques normales à la couche électromagnétique qui, dans le cas limite d'épaisseur nulle, donne une pression magnétique  $B^2/2\mu$  à l'interface, exploitée pour le formage. Le deuxième terme -rotationnel- se situe dans un plan tangent à la couche et caractérise l'effet de brassage. A fréquence élevée, ce phénomène reste secondaire vis à vis de l'effet de formage ; on découplera alors les deux phénomènes, le calcul du formage se faisant dans le cadre de la magnétostatique et le calcul du mouvement à partir de la forme calculée.

Enfin, le fait d'utiliser une fréquence unique et des déphasages de  $\pi$  ou  $2\pi$  nous permet d'utiliser les valeurs efficaces des grandeurs alternatives.

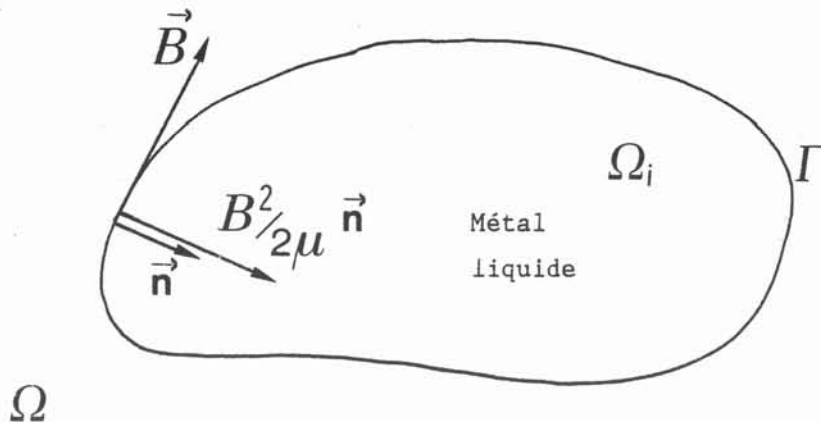
/\_/\_/

## II - EQUILIBRE DE LA SURFACE LIBRE

Considérons un fluide électroconducteur dans l'air, occupant le domaine  $\Omega_i$  et de frontière  $\Gamma$ . La pulsation  $\omega$  est suffisamment grande pour que l'épaisseur de peau soit petite devant la longueur caractéristique du domaine de telle sorte que le champ électromagnétique ne pénètre pas dans le métal. Le champ total  $\vec{B}$  peut se décomposer de la manière suivante :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$$

où  $\vec{B}_0$  est le champ appliqué en l'absence de fluide électroconducteur et  $\vec{b}$  le champ propre créé par les courants superficiels induits.



Dans le métal,  $\vec{B} = 0$  ou  $\vec{b} = -\vec{B}_0$ . Dans le domaine  $\Omega$  extérieur au métal,  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_0$  où  $\vec{j}_0$  est le vecteur densité de courant imposé dans les circuits magnétisants et  $\mu_0$  la perméabilité du vide. En ajoutant l'équation  $\text{div} \vec{B} = 0$  et la condition de frontière où  $\vec{B}$  est tangent à la surface libre, le système d'équations peut s'écrire :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_0 \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{dans } \Omega$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$



L'équilibre du milieu est assuré par l'équilibre de l'interface :  
 puisqu'on néglige les effets dus au mouvement interne du fluide, la forme de la surface libre est déterminée par un équilibre statique entre les forces gravitationnelles, de tension superficielle et de pression électromagnétique.

A l'intérieur du métal liquide, la pression hydrostatique est :

$$p_i = p_o - \rho g z \quad \text{dans } \Omega_i$$

où  $z$  est la coordonnée verticale et  $p_o$  constant. A l'interface le saut de pression dû au champ magnétique et à la tension superficielle est :

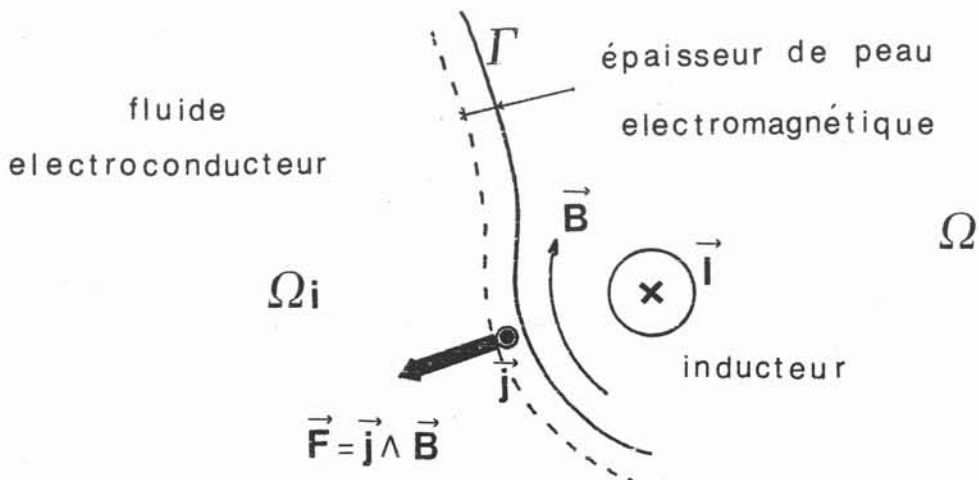
$$p_i - p_e = \gamma C + \frac{B^2}{2\mu_o} \quad \text{sur } \Gamma$$

où  $\gamma$  est la tension superficielle du fluide dans l'air,  $C$  la courbure moyenne et  $p_e$  la pression atmosphérique. La condition d'équilibre sur la frontière libre s'écrit alors :

$$\gamma C + \frac{B^2}{2\mu_o} + \rho g z = \text{cte} \quad \text{sur } \Gamma$$

Dans le cas de la lévitation électromagnétique, les trois termes de la condition d'équilibre sur la frontière libre sont pris en compte. Pour le formage électromagnétique de jets liquides. Pour le formage électromagnétique de jets liquides, il est possible de ne pas prendre en compte l'effet de la gravité et la condition se réduit à (16) :

$$\gamma C + \frac{B^2}{2\mu_o} = \text{cte} \quad \text{sur } \Gamma$$



# BIBLIOGRAPHIE

- (1) EL KADDAH N., SZEKELY J., "The turbulent recirculation flow field in a coreless industrial furnace. A comparison of theoretical predictions with measurements". J.F.M. Vol. 133, p. 37, 1983.
- (2) ETAY J., GARNIER M., "Le contrôle électromagnétique des surfaces métalliques liquides et ses applications". J.M.T.A., Vol. 1, n° 6, p. 911-925, 1982.
- (3) BIASSE J.M., ERNST R., GARNIER M., "Electromagnetic levitation. Application to welding". IEEE Transaction, IAS, 1982.
- (4) GARNIER M., "Une analyse des possibilités de contrôle électromagnétique des surfaces libres de métaux fondus", Thèse D.E. INP Grenoble, 1982.
- (5) GARNIER M., MOREAU R., "Effect of finite conductivity on the stability of an interface submitted to a high frequency magnetic field", JFM, Vol. 127, p. 365-377.
- (6) OKRESS E.C., WROUGHTON D.M., COMENETZ G., BRACE P.M., KELLY J.C.F., "Electromagnetic levitation of solid and molten metals", J. Appl. Phys., 23, 5, p. 545, 1952.
- (7) SNEYD A.D., MOFFATT H.K., "Fluid dynamical aspects of the levitation melting process", J.F.M., Vol. 117, p. 45-70, 1982.
- (8) MESTEL J., "Magnetic levitation of liquid metals", J.F.M., Vol. 117, p. 27, 1982.
- (9) GAGNOUD A., BRANCHER J.P., "Modelling of coupled phenomena in electromagnetic levitation", Compumag, Fort Collins, USA, 1985.
- (10) SHERCLIFF J.A., "Magnetic shaping of molten metal columns", Proc. R. Soc. London, A 375, p. 455-473, 1981.
- (11) ETAY J., GARNIER M., "Some applications of high frequency magnetic fields", I.U.T.A.M. Symposium, Cambridge, 1982.
- (12) BRANCHER J.P., SERO GUILLAUME O., "Sur l'équilibre des liquides magnétiques. Application à la magnetostatique", J.M.T.A., Vol. 2, n° 2, p. 265-283, 1983.
- (13) LANDAU et LIFCHITZ, "Electrodynamique des milieux continus", Edition de Moscou.
- (14) SHERCLIFF J.A., "A textbook of Magnetohydrodynamics", Edition CILSTELS, 1965.
- (15) CHANDRASEKHAR S., "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford U.P., 1961.
- (16) SERO GUILLAUME O., "Sur l'équilibre des ferrofluides et des métaux liquides", Thèse D.E. I.N.P. Lorraine, Nancy, 1983.



## C H A P I T R E 2

---

### FORMAGE ET STABILISATION D'UNE LAME

o o o o



## INTRODUCTION

### Les verres métalliques et leur élaboration

Depuis leur découverte par P. DUWEZ ( 1 ) il y a environ un quart de siècle, les matériaux amorphes prennent de plus en plus d'importance dans les laboratoires universitaires et industriels ; leurs applications industrielles restent néanmoins très limitées, la production mondiale ne devant pas excéder quelques tonnes par an.

Les verres métalliques peuvent se caractériser ( 2 ) par les propriétés suivantes :

- . Un comportement mécanique original avec une grande résistance à la traction, une dureté élevée, une aptitude certaine au pliage et une bonne tenue à la fatigue.
- . Des propriétés ferromagnétiques douces : haute perméabilité, champ coercitif et pertes magnétiques faibles, variation de la magnétostriction selon la composition.
- . Une très bonne résistance à la corrosion due à l'absence de joints de grain.
- . Enfin, une extrême variété de compositions possibles.

Parmi les principaux défauts, on peut signaler le fait que :

- . Leur élaboration reste très difficile d'un point de vue technologique et leur forme est limitée à des objets minces en général.
- . Ils ne sont pas en équilibre thermodynamique et peuvent évoluer vers des états plus stables en perdant leurs caractéristiques initiales.

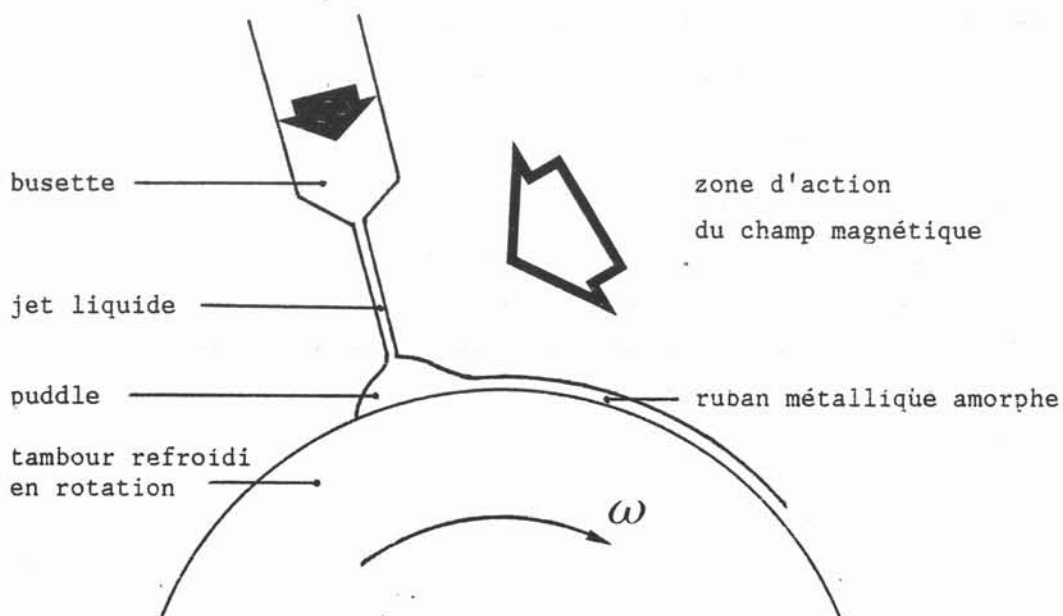
Toutes ces propriétés dépendent de la structure des verres métalliques et il est évident qu'il ne faut pas accorder à tous ces matériaux les propriétés de quelques uns : la résistance à la corrosion n'est pas toujours compatible avec de bonnes propriétés magnétiques, une bonne perméabilité magnétique peut être contrariée par une magnétostriction élevée, la tenue mécanique des rubans risque d'être gravement perturbée par les recuits qui relâchent les contraintes internes et améliorent le comportement magnétique, etc...

D'un point de vue application industrielle (3), il s'avère que les rubans amorphes peuvent se substituer avantageusement aux tôles de transformateurs à condition de produire en continu des bandes larges ( $\sim 15$  cm) et à bas coût. Ce marché est inaccessible pour le moment mais l'enjeu est de taille : le centre de recherche de Westinghouse a estimé à 30 Milliards de kWh/an les pertes des coeurs des transformateurs de puissance installés aux U.S.A. et le marché mondiale des tôles de ferrosilicium à grains orientés serait de l'ordre d'un Million de tonnes par an. Pour atteindre un tel marché, on estime qu'il faut consacrer plusieurs dizaines de milliers de Francs et plus de 10 ans de recherche et de développement ; c'est le choix qu'à fait ALLIED CORPORATION aux USA. Depuis quelques années, plusieurs sociétés françaises manifestent un intérêt pour les amorphes et plusieurs programmes ont pu être développés en collaboration avec l'Université; Pont à Mousson S.A. travaille sur les alliages ferreux, Imphy et Usinor ont entrepris des travaux sur l'élaboration de métaux amorphes et s'intéressent aux matériaux à bonnes propriétés magnétiques, P.U.K. poursuit ses recherches sur les alliages d'aluminium hypereux.

La trempe ultra rapide de ces matériaux liquides conduisant à une amorphisation (4),(5) se fait à des vitesses de refroidissement de l'ordre de  $10^4$  à  $10^6$ °K/s, d'où la difficulté d'élaboration de ces matériaux (6) ; la transition entre le liquide refroidi en dessous de son point de fusion et l'état amorphe se produit à une température qui varie avec la vitesse de refroidissement. Pour fabriquer des matériaux métalliques amorphes avec un coût minimal et dans des proportions industrielles, il faut envisager des dispositifs semi continus ou continus à partir de l'état liquide ; l'ultra-trempe s'effectue alors en coulant le métal liquide sur une face refroidie en mouvement, éjectant à grande vitesse le métal trempé instantanément. En général cette surface est un ou plusieurs rouleaux en rotation possédant une vitesse tangentielle très élevée (20 à 30 m/s).

Actuellement, les recherches se concentrent (7) sur deux méthodes de fabrication : le "Chill Block melt-spinning" et le "planar flow casting" qui permettent d'obtenir des rubans de très faible épaisseur à partir de jets liquides. Pour ce qui est du premier procédé un petit réservoir local (puddle) se forme à l'arrivée du jet liquide sur le tambour où à l'intérieur d'un cône à partir duquel se crée le ruban métallique en continue. Ce dispositif a donc l'avantage de la simplicité mais se trouve limité par la largeur du ruban que l'on obtient par la qualité de l'ultratrempe effectuée ainsi que par la géométrie finale du ruban qui dépendent de la nature du bain liquide et de sa stabilité. La technique du "planar flow casting" consiste à entraîner le ménisque se trouvant à l'orifice d'une burette par simple contact avec le rouleau en rotation ; l'alimentation du ménisque est assurée par une pression (gaz ou métal liquide) et le bain liquide se maintient entre la butée mécanique de la burette et la roue par les forces de tension superficielle, nécessitant pour cela un espace très réduit. La mise au point est très délicate et demande un matériel de grande précision; en outre ce procédé appartient à ALLIED CORPORATION.

Dans cette étude nous nous proposons d'essayer de contrôler la géométrie et la stabilité du jet et du bain liquide par un autre dispositif (8) que celui du "flot laminaire" à l'aide de champs magnétiques alternatifs, on crée des courants induits à l'intérieur du métal liquide qui engendrent donc des forces électromagnétiques qui se traduisent, moyennant certaines conditions, par des pressions en tout point de la surface considérée. Ces différences de pression imposent au métal liquide une forme qui dépend de la géométrie des inducteurs; de plus, on utilise l'action stabilisante des champs magnétiques pour limiter au maximum les instabilités existantes dans le fluide métallique.





Puisque le but du procédé est d'obtenir un ruban, le jet liquide arrivant sur le rouleau en rotation peut être de section soit circulaire, soit allongée. Une étude de stabilité hydrodynamique conduit au fait que la tension superficielle joue un rôle stabilisant dans le cas d'un jet plan bidimensionnel, et un rôle déstabilisant dans le cas d'un jet à section circulaire. L'étude est donc basée sur le formage et la stabilisation électromagnétique d'une lame avant son arrivée sur le "puddle".

Une étude parallèle (en annexe) a été faite dans le cadre de la fabrication de matériaux amorphes par la méthode du "planar flow" où on se propose de remplacer l'action mécanique des sabots de la busette par une poussée électromagnétique engendrée par un inducteur donné : des conditions d'encombrement imposent à l'inducteur d'être rectiligne, ce qui diminue considérablement l'intensité du champ produit par rapport à un inducteur multispire à courant équivalent. Les problèmes technologiques que l'on rencontre alors ne nous permettent pas de continuer plus loin cette étude.

Dans ce chapitre, après avoir décrit un type de procédé pour l'élaboration de lames minces fluides par voie électromagnétique, on étudie l'effet stabilisant d'un champ électromagnétique sur ces mêmes lames fluides : on s'aperçoit que ce phénomène dépend de la géométrie du champ et on en déduit un inducteur susceptible de répondre aux critères de formage et de stabilisation. Les manipulations sont menées à partir de cet inducteur.

/\_/\_/\_/

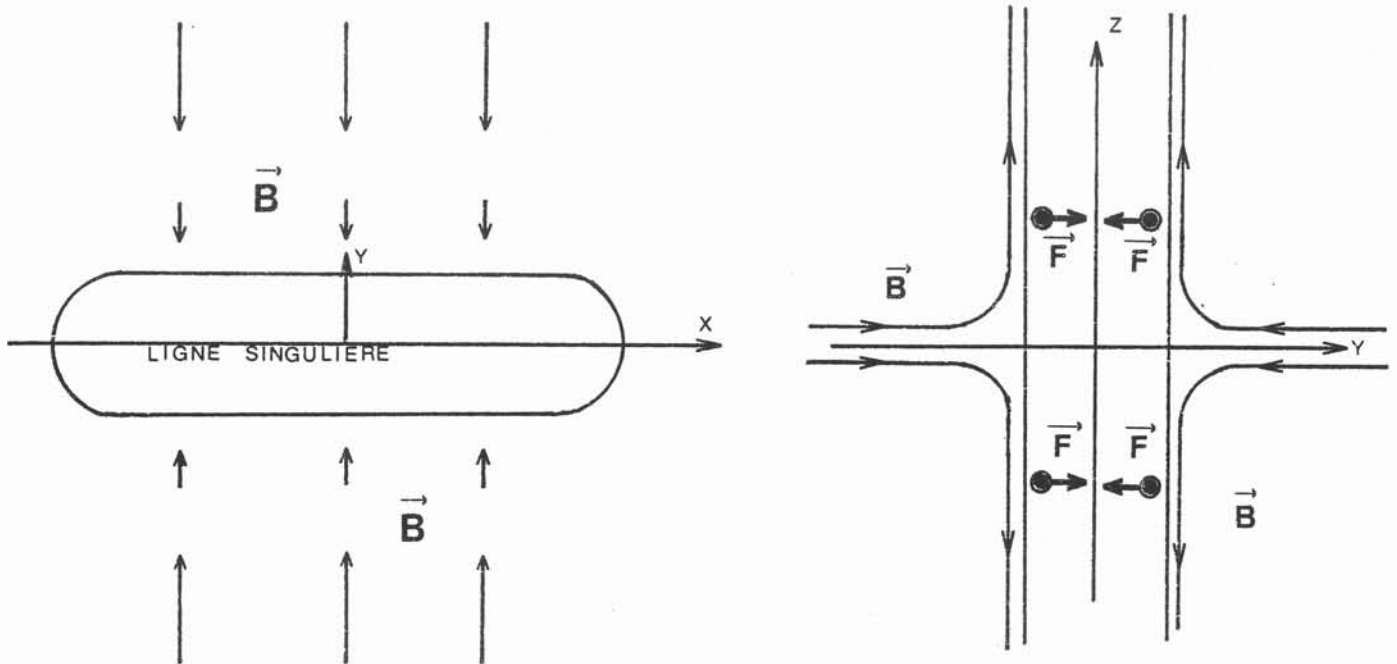
## I - PROCEDE DE FORMAGE DE LAMES LIQUIDES

Le problème posé est le suivant : étant donnée une forme d'équilibre, quelles sont les caractéristiques géométriques et électriques des inducteurs susceptibles de produire dans un milieu métallique liquide les efforts nécessaires pour imposer de façon stable la forme désirée. L'approche concerne trois niveaux : un problème de frontière libre au niveau du domaine métallique, puisque la forme de la surface libre est régie par le champ magnétique, lui-même fonction de la position et de la forme de cette surface ; un problème de stabilité au niveau du métal liquide (stabilité locale et stabilité globale) ; un problème électromagnétique au niveau de l'inducteur.

Notre étude concerne les problèmes de frontière libre et de stabilité sur un exemple précis : la mise en forme ou le maintien d'un jet de métal sous l'aspect de lame mince. Un premier procédé - mis au point par J. ETAY (9) - consiste à utiliser l'effet d'un champ électromagnétique unidirectionnel ; - sous l'action des forces électromagnétiques qui naissent lorsque le jet de métal liquide s'écoule par gravité à travers le champ intense - le fluide a tendance à s'étirer suivant la direction des lignes de champ de façon à les perturber le moins possible. Ce dispositif, très efficace pour les lames de faible largeur, ne peut être utilisé dans le cas des lames de grande largeur ; en effet, la création de champs électromagnétiques uniformes posent de grandes difficultés technologiques lorsque les dimensions deviennent importantes, du fait de la décroissance très rapide du champ dans l'air. A titre d'exemple, pour un champ uniforme de 500 Gauss à 250 KHz on ne peut guère obtenir de lames supérieures à 30 mm à partir d'un jet circulaire de diamètre 15 mm ; pour des largeurs plus élevées, les lames ont tendance à se creuser en leur milieu, du fait de la décroissance rapide du champ magnétique dans l'espace.

Si on considère la configuration formée par deux champs électromagnétiques parallèles, de même direction et de sens contraire, il existe une surface plane perpendiculaire à la direction commune des champs appliqués. Cette surface de champ contient une droite singulière le long de laquelle l'intensité du champ magnétique s'annule (ligne d'arrêt).

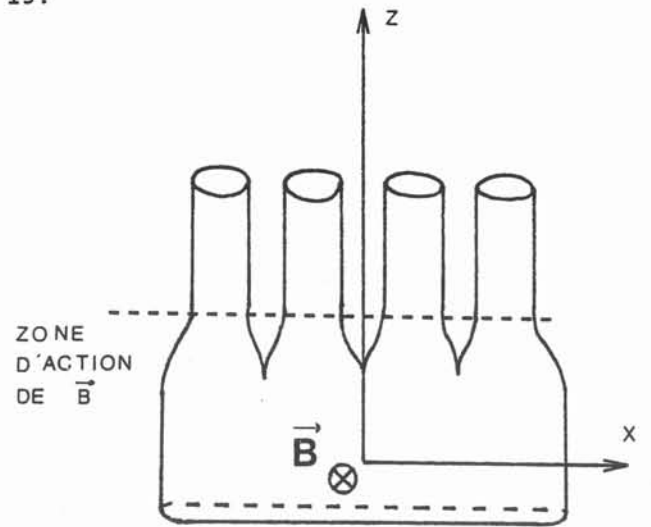
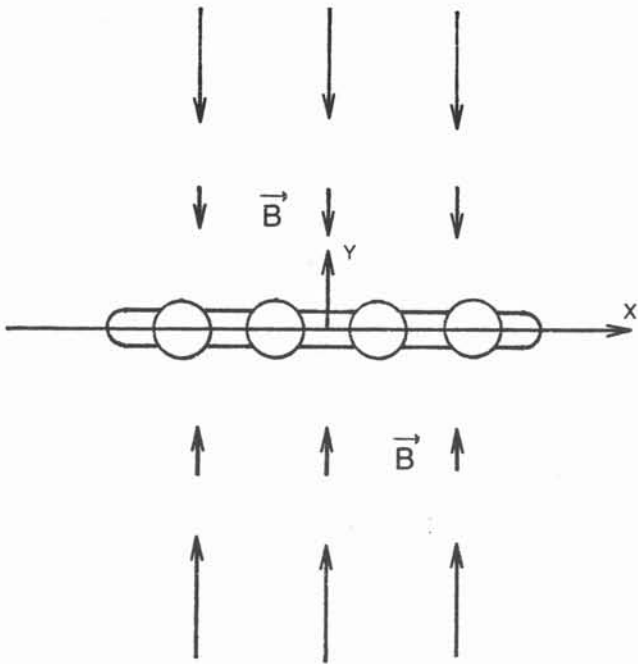
A cause de la présence de cette droite singulière, le module du champ magnétique croît rapidement à partir de la surface du champ qui la contient en direction des inducteurs. Lorsqu'une veine de métal liquide s'écoule à proximité de la ligne singulière, le système de forces de rappel auquel elle est soumise tend à lui imposer une géométrie analogue à celle du trou de potentiel ainsi constitué. Une telle configuration permet le formage et le maintien d'un jet de fluide électro-conducteur sous forme d'une lame mince.



L'avantage d'un tel dispositif réside dans le fait qu'il n'impose plus de limite à la largeur de la lame fluide à former. En effet, d'un point de vue technologique, les faces actives des inducteurs sont parallèles à la lame métallique liquide ; elles peuvent donc être placées très près de la lame, réduisant au maximum l'effet négatif de la décroissance du champ dans l'air. En outre la configuration de base du système inducteur, constitué de deux bobines face à face, peut être reproduite parallèlement à la lame.

Il est ainsi possible de remplacer la veine liquide initialement circulaire par une série de veines liquides parallèles entre elles et coupant la droite singulière. Pour une intensité suffisante du champ magnétique, les veines métalliques s'étirent le long du trou de potentiel, viennent au contact les unes des autres, et coalescent pour ne plus former qu'une seule lame de grande largeur.

19.



## II - STABILISATION

Pour les premières études sur l'optimisation des injecteurs de films fluides, des photographies ont été prises dans la région où le liquide a tendance à se diviser en gouttelettes. Les résultats montrent qu'avant la formation des gouttes, des ondulations ou des rides apparaissent à la surface du fluide (dont la fréquence et la longueur d'onde sont en relation avec la dimension des gouttes produites). Généralement, ces ondes sont transversales, c'est-à-dire que les lignes de crêtes sont perpendiculaires à la direction du mouvement du liquide (10), (11), (12).

Dans ce paragraphe, on étudie l'effet du champ électromagnétique sur le phénomène d'instabilité interfaciale de type Kelvin-Helmoltz dans le cadre de la théorie linéaire (13), (14), (15).

### II.1. Position du problème :

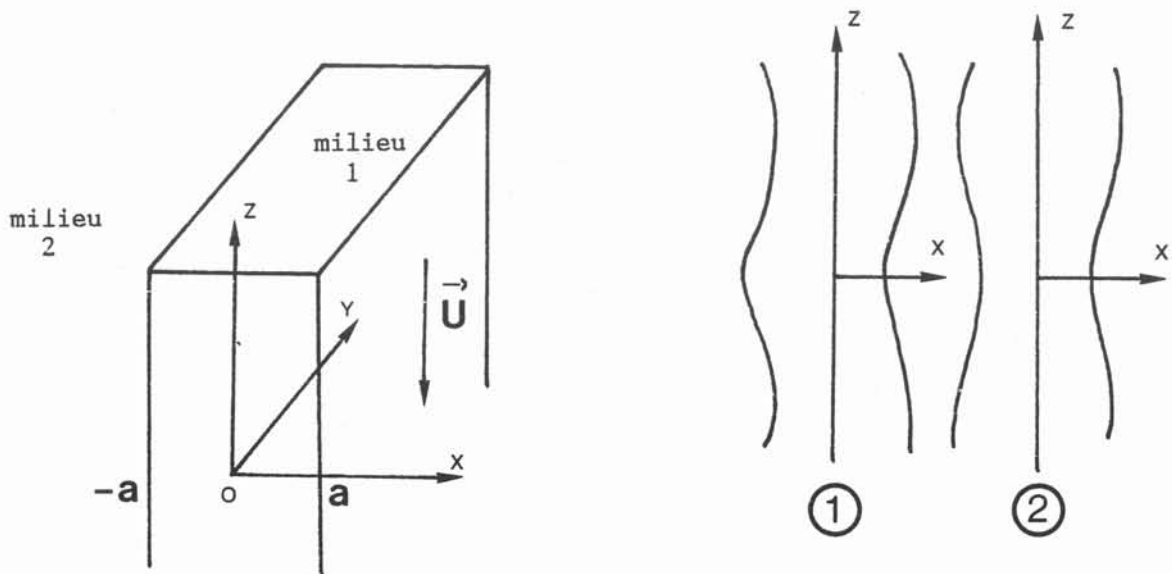
On considère un jet plan dont on veut étudier la stabilité ; pour cela on émet les hypothèses de calcul suivantes :

- . La lame d'épaisseur  $2a$  est de largeur infinie, c'est-à-dire que les effets d'extrémité ne sont pas pris en compte.
- . Le fluide est considéré comme parfait, ce qui peut sous-estimer le critère de stabilité puisqu'en général la viscosité correspondant à une dissipation d'énergie possède un effet stabilisant.
- . La vitesse d'écoulement du jet est uniforme et parallèle à l'axe vertical, c'est-à-dire qu'on néglige l'effet de l'accélération dû à la gravité.
- . Dans une décomposition en modes normaux, on considère les deux types de perturbation possibles, c'est-à-dire antivariques (①) et variques (②). Les plans d'interfaces initiaux  $x = \pm a$  deviennent les surfaces d'équation :

$$\begin{aligned} x &= a + \varepsilon e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ x &= -a + \varepsilon e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{aligned}$$

où  $\omega$  est une fréquence complexe et  $\vec{k}$  le vecteur d'onde associée à la perturbation d'amplitude initiale  $\varepsilon$  ( $k \in \mathbb{R}^2$ ).

Dans le mode d'étude temporel que nous avons choisi,  $\vec{k}$  est fixé et  $\omega$  est déterminé par la dynamique du système. C'est la partie imaginaire  $\omega_i$  qui donne le critère de stabilité puisque l'amplitude de la perturbation initiale ne peut décroître si  $\omega_i > 0$ .



## II.2. - Etude de la stabilité :

On introduit dans les équations du mouvement et de continuité les termes de fluctuations dues aux perturbations induites sur  $\vec{U}$  et  $P$  notées  $\vec{u}$  et  $p$ . L'analyse linéaire ne retient que les termes du 1er ordre en  $\epsilon$  (supposé petit vis à vis des échelles caractéristiques du système). Les termes quadratiques en perturbations sont négligés et, puisque  $U$  est uniforme, les équations deviennent :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

On recherche des solutions sous la forme :

$$f(x) e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

où  $f(x)$  est un  $O(\epsilon)$ . Avec  $k = (0, 1, m)$ ,  $\vec{U} = (0, 0, U)$ ,  $\vec{u} = (u, v, w)$ , les équations d'Euler et de continuité s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} i(\omega + m U) u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} Dp \quad (1) \\ i(\omega + m U) v = -\frac{1}{\rho} i l p \quad (2) \\ i(\omega + m U) w = -\frac{1}{\rho} i m p \quad (3) \\ Du + i l v + i m w = 0 \quad (4) \end{array} \right.$$

On remarque que (1), (2), (3) et (4) impliquent  $\Delta p = 0$ , c'est-à-dire que la perturbation de la pression admet comme solution :

$$p = (A e^{kx} + B e^{-kx}) e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (5)$$

Les conditions aux limites du système permettent de déterminer les inconnues A et B et donc de connaître p, u, v et w en tout point. Elles sont de deux types ; d'une part les conditions sur la pression à l'interface (prise en compte des effets de tension superficielle), d'autre part les conditions sur la vitesse de déplacement de l'interface :

$$* \text{ Aux interfaces, on a } \begin{cases} p_1^+ = p_2^+ + T \Sigma \frac{1}{R} \\ p_1^- = p_2^- + T \Sigma \frac{1}{R} \end{cases}$$

avec  $\Sigma \frac{1}{R} = \text{div } \vec{n}$ ,  $\vec{n}$  étant la normale extérieure locale du milieu 1.

Avec  $\eta = e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$  on a :

$$\begin{cases} p_1^+ = p_2^+ + \gamma \varepsilon k^2 \eta \\ p_1^- = p_2^- + \gamma \varepsilon k^2 \eta \end{cases} \quad (6)$$

De plus, compte tenu du fait que la perturbation  $p_2$  est nulle à l'infini, (5) pour le milieu 2 s'écrit :

$$\begin{cases} p_2^+ = B_2^+ e^{-kx} \eta \\ p_2^- = A_2^- e^{kx} \eta \end{cases} \quad (7)$$

\* Les conditions sur les vitesses à l'interface suivant l'axe x imposent l'égalité de la composante normale de la vitesse du fluide et de la vitesse de déplacement de l'interface :

$$(1) \Rightarrow u_2^+ = \frac{i}{\rho_2 \omega} Dp_2^+ \quad (7) \Rightarrow B_2^+ e^{-ka} = \frac{-\rho_2}{k} \omega^2 \epsilon \quad (8)$$

$$u_2^+ = \frac{d}{dt}(x) = i\omega \epsilon \eta$$

de même avec  $u_2^-$  on a la condition :  $A_2^- e^{-ka} = \pm \frac{\rho_2}{k} \omega^2 \epsilon$

De plus, en tout point de l'interface,  $u_1 = u_2$

$$u_1^+ = \frac{dx^+}{dt} = i(\omega + mU) \epsilon \eta \quad \text{et} \quad u_1^+ = \frac{i}{\rho(\omega+mU)} Dp_1^+$$

$$u_1^- = \frac{dx^-}{dt} = \pm i(\omega + mU) \epsilon \eta \quad u_1^- = \frac{i}{\rho(\omega+mU)} Dp_1^-$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 e^{ka} - B_1 e^{-ka} = \frac{\rho_1}{k} (\omega+mU)^2 \epsilon \\ A_1 e^{-ka} - B_1 e^{ka} = \pm \frac{\rho_1}{k} (\omega+mU)^2 \epsilon \end{cases} \quad (9)$$

Le système d'équations est donc le suivant :

$$\begin{cases} A_1 e^{ka} - B_1 e^{-ka} = \alpha \\ \alpha = \frac{\rho_1}{k} (\omega+mU)^2 \epsilon \\ A_1 e^{-ka} - B_1 e^{ka} = \pm \alpha \end{cases}$$

$$(6) \Rightarrow \begin{cases} A_1 e^{ka} + B_1 e^{-ka} = \beta \\ \beta = \gamma \epsilon k^2 - \frac{\rho_2}{k} \omega^2 \epsilon \\ A_1 e^{-ka} + B_1 e^{ka} = \pm \beta \end{cases}$$

Ce qui conduit aux deux équations de dispersion reliant  $\omega$  aux divers paramètres du système :

cas 1 :  $x = -a + \epsilon \eta \Rightarrow \alpha = \beta \coth ka$

cas 2 :  $x = -a - \epsilon \eta \Rightarrow \alpha = \beta \th ka$



c'est-à-dire :

- dans le cas antivariquieux :

$$\omega^2 (\rho_1 + \rho_2 \coth ka) + \omega(2mU\rho_1) + m^2 U^2 \rho_1 - \gamma k^3 \coth ka = 0$$

- dans le cas variquieux :

$$\omega^2 (\rho_1 + \rho_2 \th ka) + \omega(2mU\rho_1) + m^2 U^2 \rho_1 - \gamma k^3 \th ka = 0$$

Etudions l'action d'un champ magnétique sur de telles perturbations. Soit un champ magnétique uniforme  $B_0$ , toujours dans le plan yz, dont la direction possède un angle  $\theta$  par rapport au vecteur d'onde  $\vec{k}$  (16).

Le champ  $\vec{B}$  total est la somme du champ  $B_0$  et du champ  $\vec{b}$  significatif des perturbations de la surface. On fait l'hypothèse de pénétration nulle ( $\delta = 0$ )

$$x = \pm a \pm \epsilon \eta \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \begin{cases} f(x) \eta \\ g(x) \eta \\ h(x) \eta \end{cases}$$

(translation du repère/  
repère initial où les  
les interfaces sont  $x = \pm a$ )

$$\Delta \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \begin{cases} A e^{-kx} \eta \\ B e^{-kx} \eta \\ C e^{-kx} \eta \end{cases} \quad \text{puisque la perturbation magnétique s'annule à l'infini.}$$

Pour déterminer les valeurs de A, B, et C, on écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0, C = -iA$$

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = iB_0 \cos \theta \epsilon k$$

La pression magnétique engendrée par le champ total  $\vec{B}$  est :

$$\frac{B^2}{2\mu} = \frac{(\vec{B}_0 + \vec{b}) \cdot (\vec{B}_0 + \vec{b})}{2\mu}$$

et l'écart dû à la perturbation par rapport à l'état de référence s'écrit au 1<sup>o</sup> ordre en  $\epsilon$  :

$$\frac{\vec{b} \cdot \vec{B}_0}{\mu} \sim \frac{B_0^2 \cos^2 \theta \epsilon k \eta}{\mu}$$

Aux interfaces on a alors l'équilibre de la pression :

$$p_1 = p_2 + \gamma \varepsilon k^2 \eta + \frac{B_0^2 \cos^2 \theta \varepsilon k \eta}{\mu}$$

et le nouveau système d'équations conduits aux équations de dispersion suivantes :

- cas antivariqueux :

$$\omega^2(\rho_1 + \rho_2 \coth ka) + \omega(2mU\rho_1) + m^2U^2\rho_1 - (\gamma k^3 + \frac{B_0^2 \cos^2 \theta k^2}{\mu}) \coth ka = 0$$

- cas variqueux :

$$\omega^2(\rho_1 + \rho_2 \th ka) + \omega(2mU\rho_1) + m^2U^2\rho_1 - (\gamma k^3 + \frac{B_0^2 \cos^2 \theta k^2}{\mu}) \th ka = 0$$

### II.3. - Résultats

Le jet est stable si la perturbation  $\varepsilon e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$  ne s'amplifie pas au cours du temps.  $\omega$  est solution d'une équation du 2ème degré à coefficients réels ; si les racines sont complexes conjuguées, elles correspondent d'une part à une perturbation amortie ( $\varepsilon e^{-\omega_i t}$ ), d'autre part à une perturbation amplifiée ( $\varepsilon e^{\omega_i t}$ ). La condition de stabilité s'écrit donc  $\Delta \geq 0$  pour les équations de dispersion.

On constate que les perturbations du type variqueux conduisent à un critère de stabilité moins sévère que les perturbations du type "antivariqueux" : pour la suite de l'étude, on ne s'intéressera qu'à ce dernier type d'oscillations. De même, on remarque que le critère est d'autant plus sévère que  $m$  est grand, c'est-à-dire que le cas le plus défavorable correspond à  $m = k$ .

Le problème est régi par deux paramètres adimensionnels : le premier est le nombre de Weber qui caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces de tension superficielle :

$$W = \frac{a \rho_1 U^2}{\gamma}$$

Le deuxième est utilisé pour caractériser le rapport entre les forces d'inertie et les forces électromagnétiques : on peut l'appeler nombre d'Euler magnétique :

$$N = \frac{\mu \rho_1 U^2}{B_o^2}$$

avec  $r = \rho_2/\rho_1$  et  $\omega = kc$ , l'équation de dispersion devient :

$$\frac{c^2}{U^2} (1+r \coth ka) + 2 \frac{c}{U} + 1 - \left( \frac{\gamma k}{\rho_1 U^2} + \frac{B_o^2 \cos^2 \theta}{\mu \rho_1 U^2} \right) \coth ka = 0$$

c'est-à-dire :

$$\left( \frac{c}{U} \right)^2 (1 + r \coth ka) + 2 \frac{c}{U} + 1 - \left( \frac{ak}{W} + \frac{\cos^2 \theta}{N} \right) \coth ka = 0$$

avec  $\alpha = ak$  la condition de stabilité s'écrit :

$$1 - \left[ \left( 1 - \left( \frac{\alpha}{W} + \frac{\cos^2 \theta}{N} \right) \coth \alpha \right) (1 + r \coth \alpha) \right] \geq 0$$

soit :

$$\left( \frac{\alpha}{rW} + \frac{\cos^2 \theta}{rN} \right) (1 + r \coth \alpha) \geq 1$$

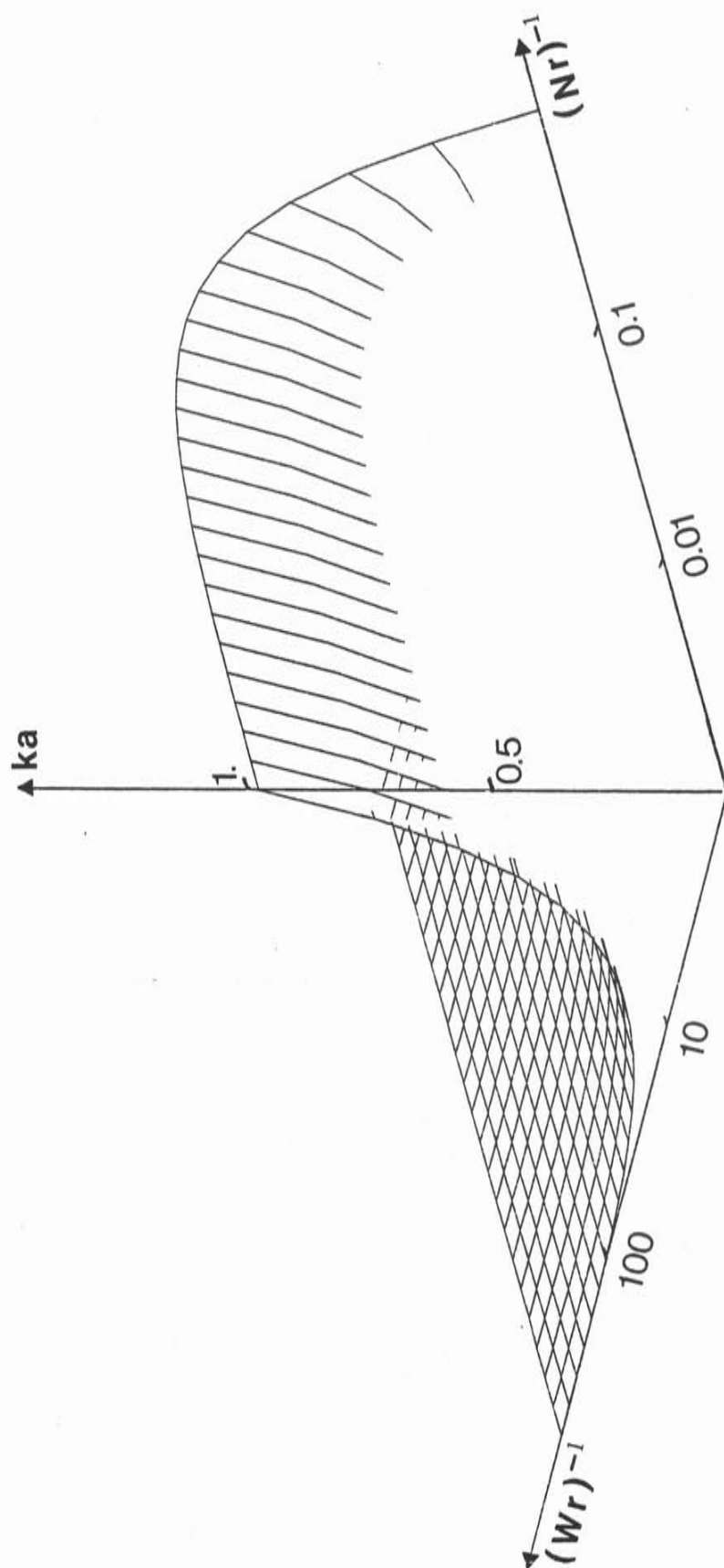
On constate que la tension superficielle joue un rôle stabilisant, à l'inverse de la vitesse et de la masse volumique du fluide. Les champs magnétiques alternatifs possèdent un effet stabilisant dont l'influence est anisotrope ; l'effet de ces champs est maximum lorsque les vecteurs d'onde de la perturbation sont parallèles à  $\vec{B}$ . L'effet s'annule lorsque ces vecteurs lui sont perpendiculaires. La stabilisation est d'autant plus efficace pour un champ  $B_o$  donné que la fréquence des courants inducteurs est élevée et que le module du vecteur d'onde  $\vec{k}$  est grand.

On trace la surface de stabilité marginale séparant les domaines de stabilité et d'instabilité en fonction de paramètres adimensionnels  $(Wr)^{-1}$  et  $(Nr)^{-1}$ . A titre indicatif, si on calcule  $(Wr)^{-1}$  dans un cas se rapprochant de nos expériences, on trouve :

$$\gamma \sim 0.5 \text{ N/m} ; \rho_1 \sim 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 ; \rho_2 \sim 1.3 \text{ kg/m}^3, a \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$U \sim 5 \text{ m/s} \rightarrow (Wr)^{-1} \sim 7,6$$

ce qui veut dire qu'en hydrodynamique pure, le système est instable ; il n'en est pas de même avec l'adjonction d'un champ magnétique.



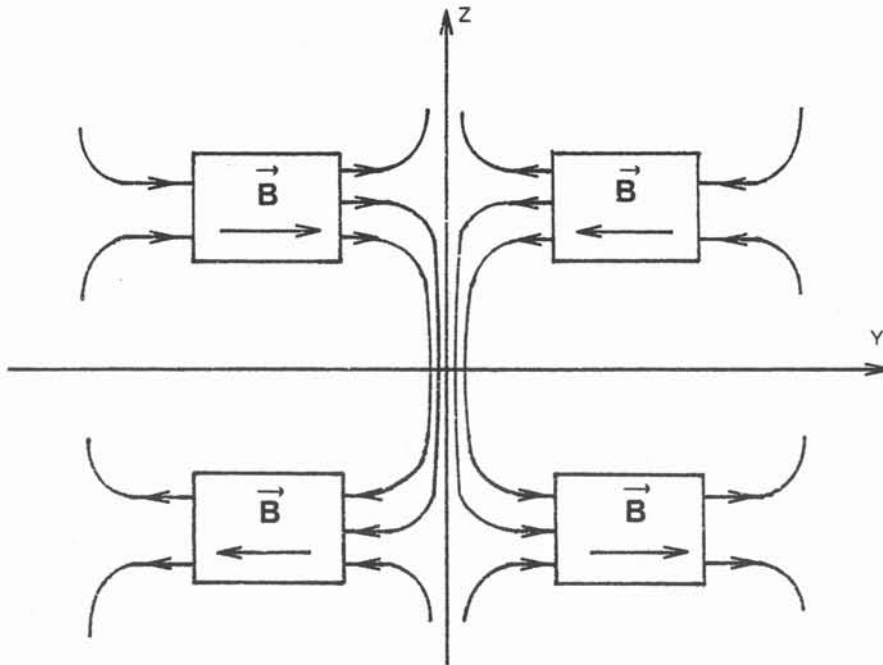
SURFACE DE STABILITE MARGINALE

### III - EXPERIENCES

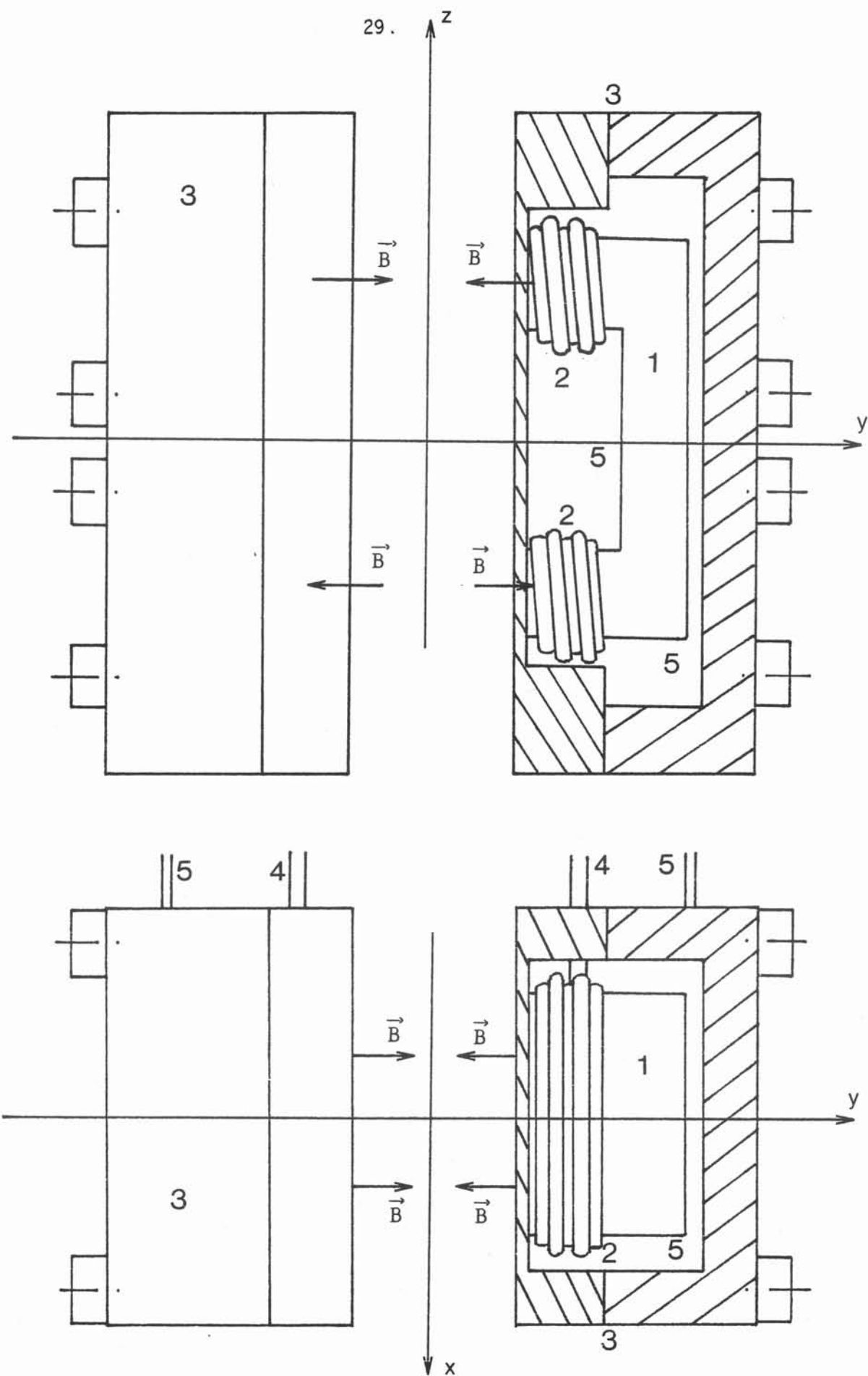
#### III.1. - L'inducteur :

En rapport avec les paragraphes I et II, on s'aperçoit que les critères de formage électromagnétique et de stabilisation d'une veine mince liquide impliquent pour l'inducteur un champ magnétique en opposition susceptible de créer une ligne singulière sur laquelle le champ s'annule, ainsi qu'un champ magnétique parallèle à cette surface et de direction verticale.

On peut obtenir un tel inducteur à partir de quatre bobines allongées, parallèles, en opposition de phase les unes par rapport aux autres, selon le modèle suivant :



Pour canaliser le champ électromagnétique, on utilise deux circuits de ferrite en forme de C 1 . Les quatre bobines 2 coaxiales deux à deux sont alimentées par un courant  $I$  alternatif dont la fréquence peut varier de 100 KHz à 350 KHz. Le champ magnétique ainsi créé forme une surface singulière perpendiculaire à l'axe des bobines le long de laquelle le fluide



INDUCTEUR QUADRISPIRES

tend à s'écouler. La géométrie du champ magnétique est telle que la lame liquide a une vitesse d'écoulement parallèle aux lignes de champ, ce qui rend l'effet stabilisant du champ magnétique maximum durant toute la hauteur de l'inducteur. Il a été déposé un brevet international relatif à ce dispositif.

Les inducteurs sont placés dans des enveloppes protectrices 3 (en résine ou en PVC), nécessaires à cause des projections de métal liquide pouvant provoquer des arcs électriques entre les spires des bobines du fait de la fréquence très élevée des courants. Dans le cas de matériaux à hauts points de fusion, on pourra utiliser de la céramique.

Le refroidissement des bobines 4 en cuivre est obligatoire du fait de la puissance électrique injectée dans les inducteurs ; on utilise pour cela du tube de cuivre de 0.5 mm d'épaisseur ( $> \delta$  pour une fréquence de 100 KHz) dans lequel l'eau circule avec des débits de l'ordre de 300 l/h. On assure aussi le refroidissement des ferrites 5 quiaturent rapidement avec la puissance injectée du fait de la fréquence élevée du champ magnétique qui les traverse ; de plus le refroidissement évite les chocs thermiques, toujours fatals à ce matériau ; le débit d'eau est de l'ordre de 50 l/h.

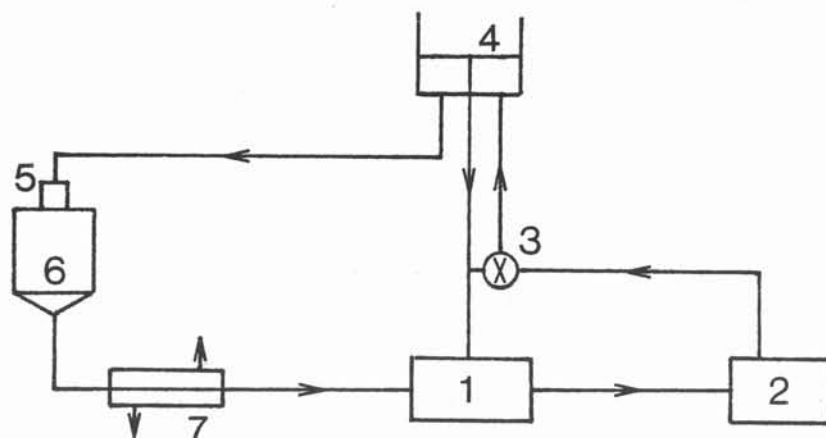
La fréquence d'utilisation est un paramètre fondamental quant à l'épaisseur de la lame mince. En effet, pour un métal donné, elle est caractéristique du volume de fluide dans lequel agissent les forces de Laplace. Pour une fréquence donnée, il faudrait fournir une puissance supplémentaire élevée pour amincir légèrement une lame d'épaisseur  $2\delta$ , alors qu'en augmentant la fréquence, l'effort de puissance serait moindre. A titre d'exemple, sur le mercure, lorsque nous utilisons des fréquences de 350 KHz, la profondeur de peau électromagnétique  $\delta$  est de l'ordre de 0,85 mm, c'est-à-dire que l'épaisseur minimale de la lame formée est de l'ordre de 1,7 mm.

### III.2. - Le dispositif d'étude :

Il se compose de trois circuits distincts : électrique, hydrauliques pour le mercure et pour l'eau de refroidissement. Ces circuits convergent vers

une cellule d'essai fermée pour des raisons de sécurité relatives à l'utilisation du mercure comme métal liquide et à l'intensité du courant électrique qui circule dans les inducteurs.

Le mercure stocké dans un réservoir 1 remonte dans la cuve à niveau constant 4 par l'intermédiaire d'une pompe 2 ; le débit est régulé par un by-pass 3 pour limiter l'agitation dans la cuve et pour atténuer au maximum la turbulence à l'intérieur du fluide. Par gravité, le mercure s'écoule dans la cellule d'essai 6 en passant par un injecteur 5 constitué d'un nid d'abeille et d'un convergent de façon à obtenir un jet stable. Le mercure, qui s'échauffe sous l'action des courants induits, passe dans un échangeur 7 avant de retourner au réservoir.

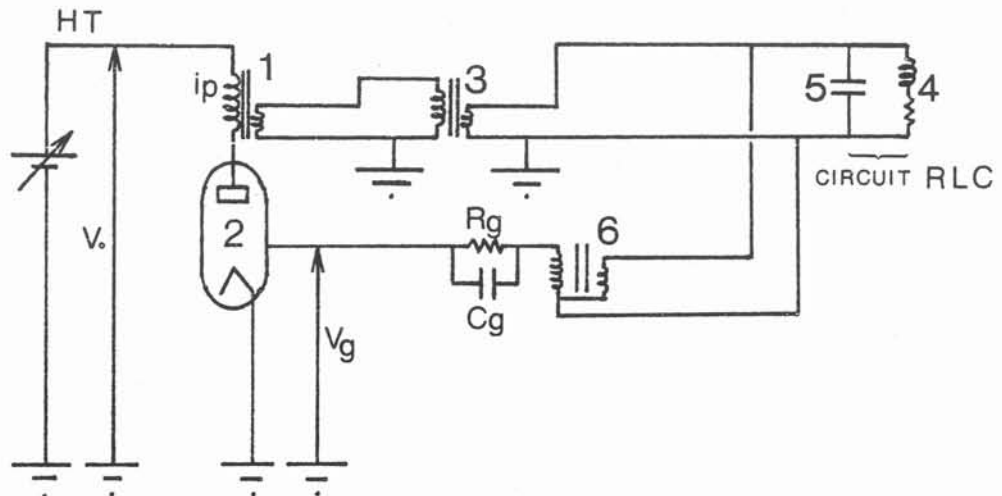


L'alimentation haute tension du générateur est obtenue par redressement de la tension secondaire d'un transformateur élévateur branché sur le réseau triphasé. Pour des raisons de sécurité, un transformateur apériodique 1 abaisse cette tension ; elle se retrouve au transformateur amont 3 qui permet une adaptation de la charge du circuit oscillant.

Un circuit de contre réaction passe par l'intermédiaire d'un transformateur élévateur (transfo grille) 6 et polarise la grille de la triode 2 elle-même alimentée par le primaire du transformateur abaisseur.



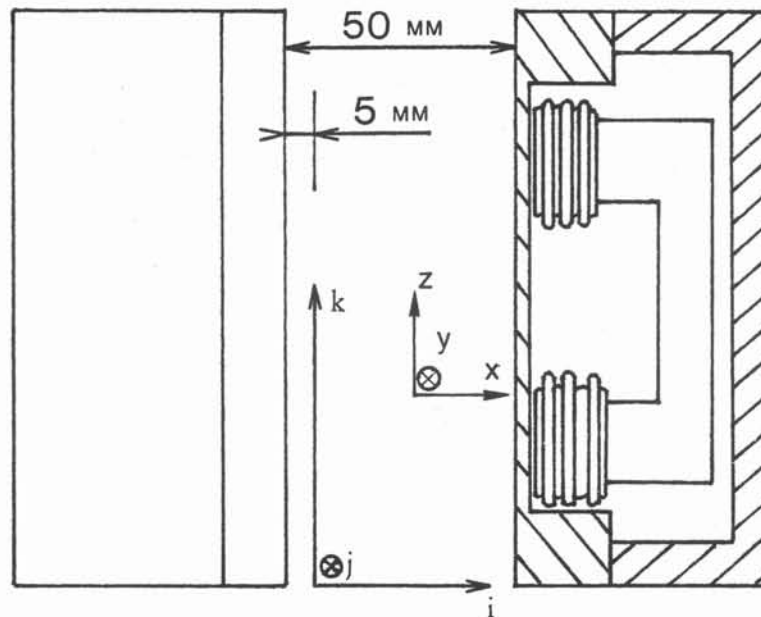
Par ce procédé, le générateur oscille toujours à la fréquence propre du circuit oscillant. Le générateur fournit la seule puissance nécessaire au maintien des oscillations. La fréquence d'utilisation est déterminée par le coffret de capacités 5, branché en parallèle avec l'inducteur 4 de résistance  $R$  et de self  $L$ , constituant ainsi un circuit RLC.



Le circuit de refroidissement permet d'évacuer les pertes dissipées par effet Joule dans le générateur, le coffret de capacités, les transformateurs, l'inducteur et le mercure. Des sondes de températures de type différentiel sont placées sur les circuits de refroidissement en plus de celui du mercure. De même, les différents débits sont mesurés sur chaque circuit.

### III.3. - Résultat de la configuration du champ magnétique

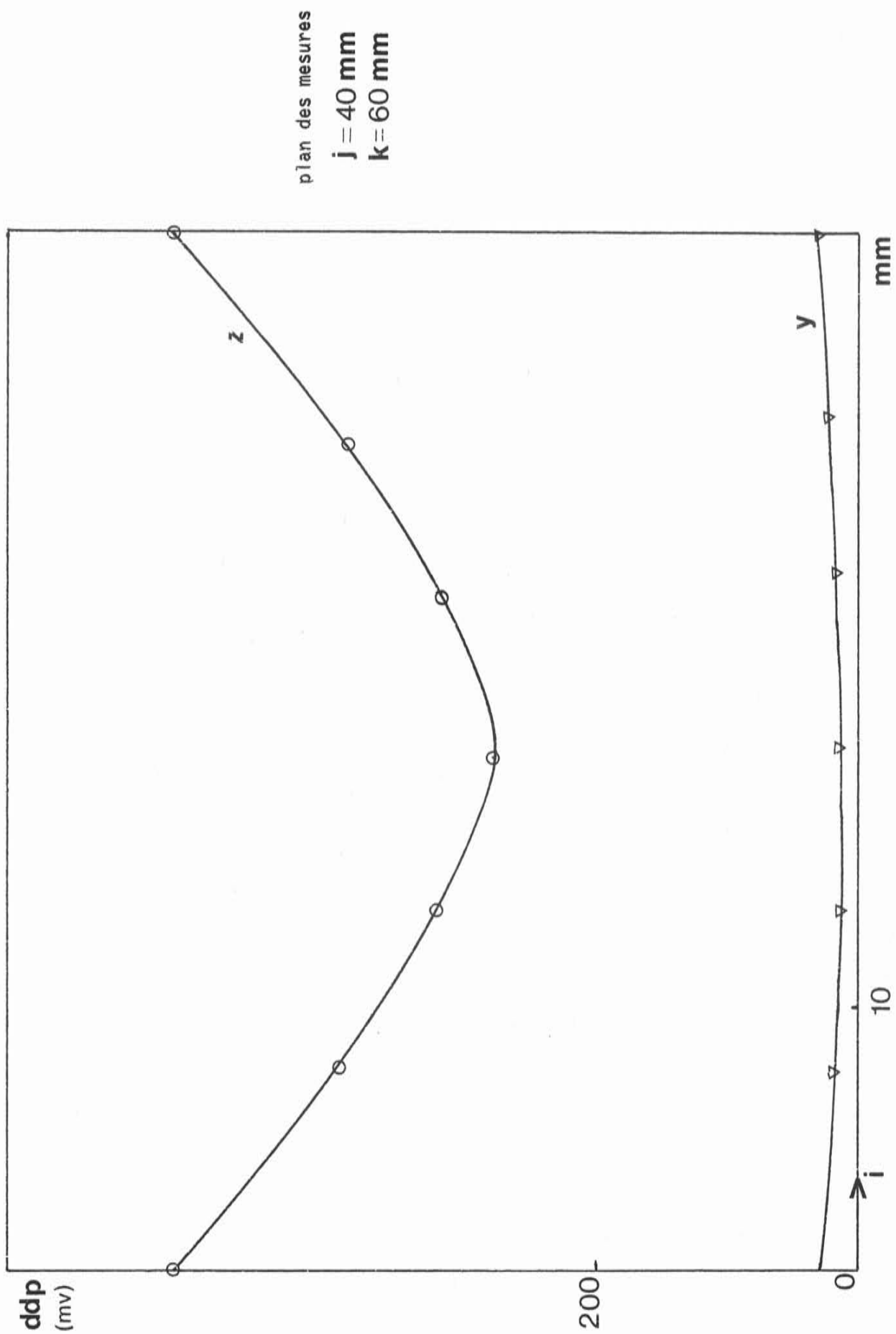
On étudie la configuration géométrique du champ magnétique en balayant à l'aide d'une sonde le domaine compris entre les deux inducteurs. Cette sonde est un solénoïde constitué de 8 microspires de diamètre 1 mm ; elle peut se positionner suivant les trois axes  $x$ ,  $y$ , et  $z$ . L'inducteur est alimenté à très basse puissance, et la fréquence d'oscillation est de 231 KHz. Les résultats, qui dépendent de l'emplacement de la sonde et de la direction de l'axe du solénoïde, sont donnés en millivolts. Les inducteurs sont espacés de 50 mm et le trièdre  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est désigné de la manière suivante :



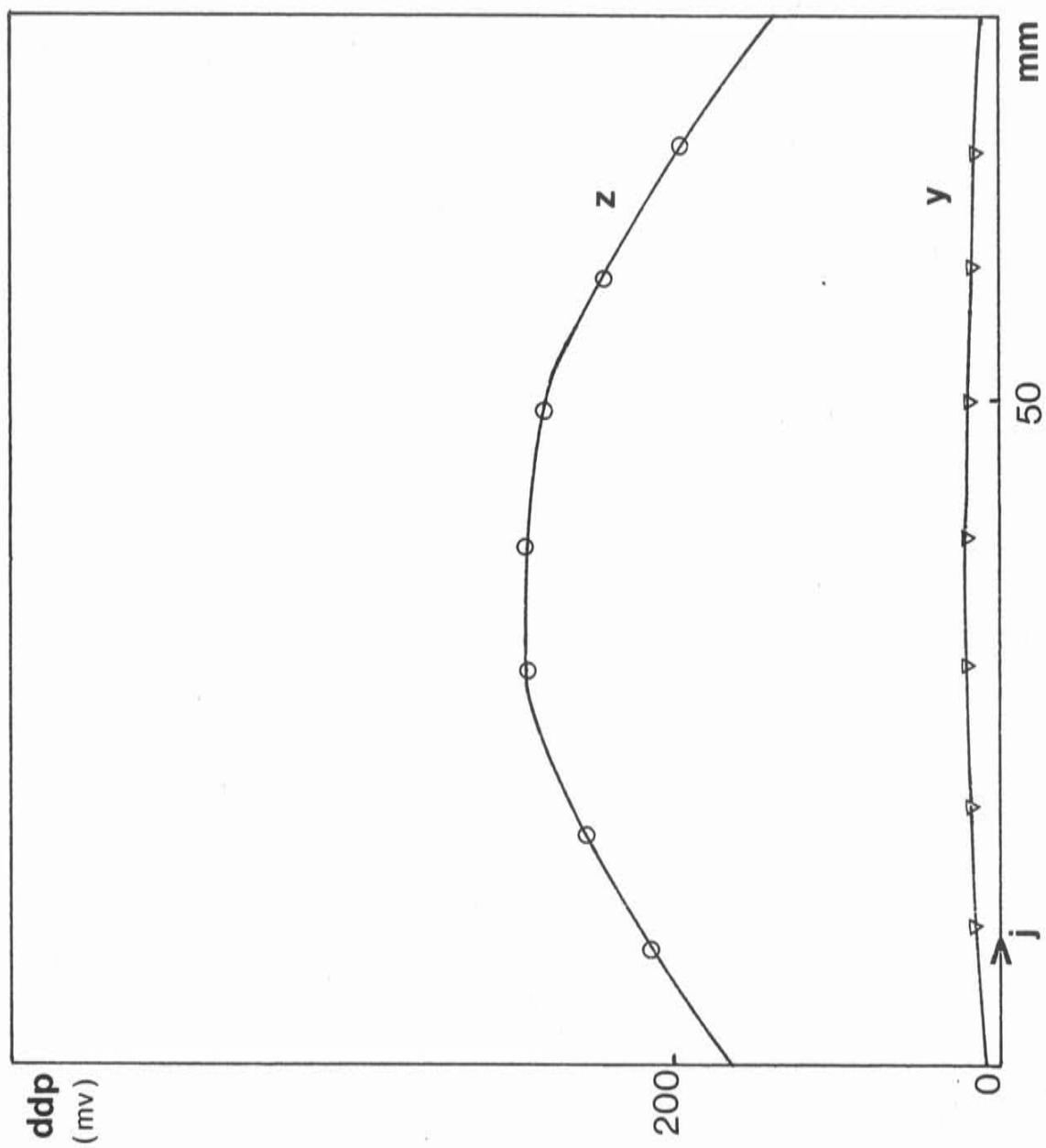
Les courbes représentent successivement les variations de la différence de potentiel donnée par la sonde :

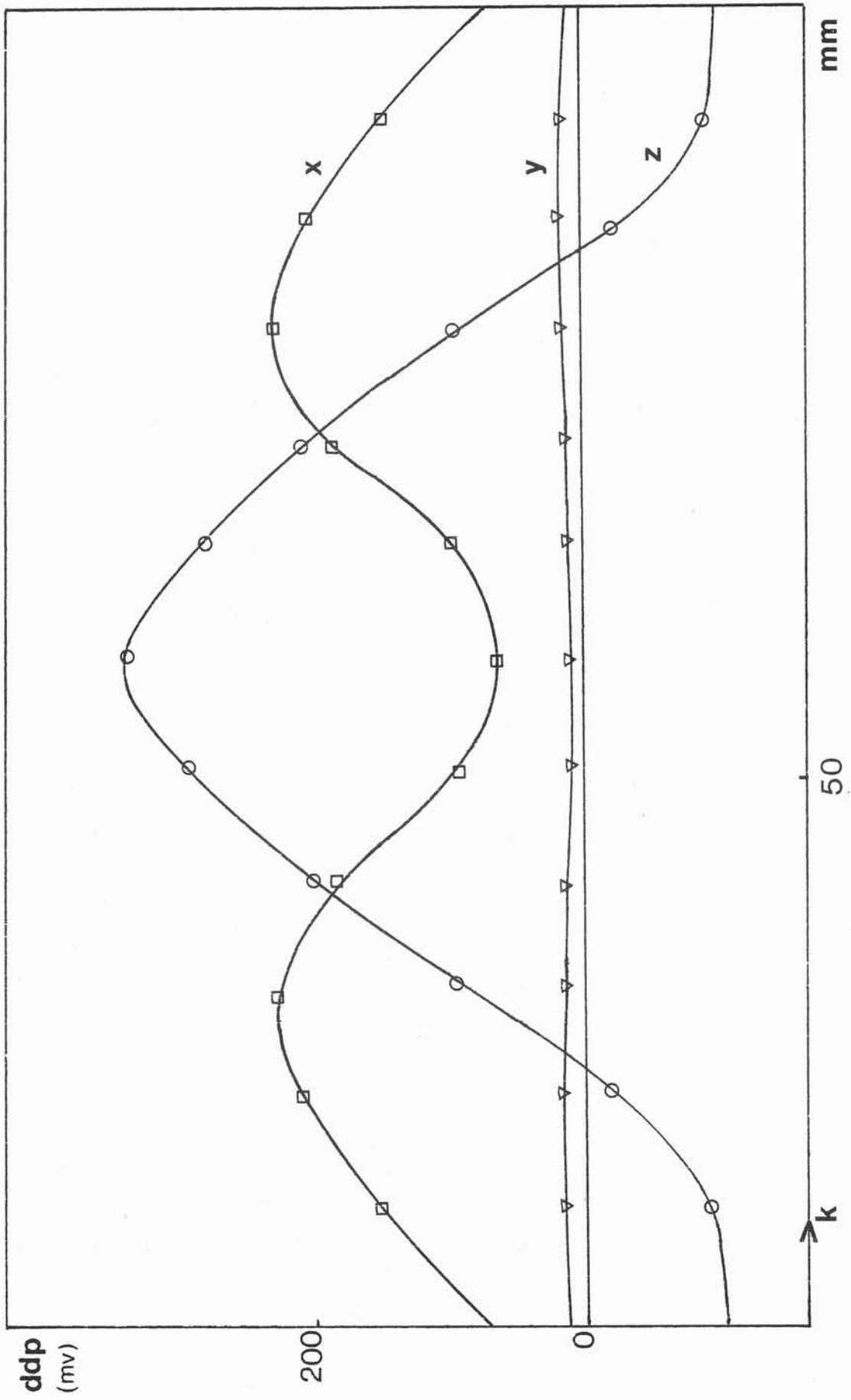
- . Sur l'axe  $\vec{i}$  à mi-largeur et à mi-hauteur avec l'axe de la sonde suivant la direction y et la direction z.
- . Sur l'axe  $\vec{j}$  à mi-épaisseur et à mi-hauteur avec l'axe de la sonde suivant la direction y et z. Pour ces deux cas, des raisons d'encombrement font qu'on ne peut avoir l'axe de la sonde suivant la direction x.
- . Sur l'axe  $\vec{k}$  à mi-épaisseur et à mi-largeur avec l'axe de la sonde suivant les trois directions.

On constate l'effet de trou de potentiel ainsi que le caractère quasi bidimensionnel de l'inducteur ( $\Delta V$  est très faible lorsque l'axe de la courbe est dirigé suivant la direction y).



plan des mesures

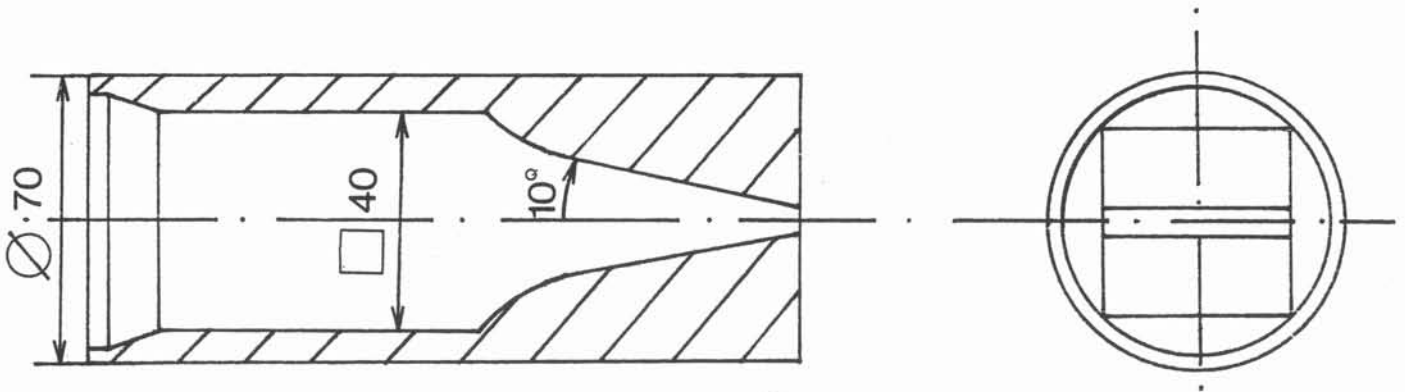
 $i = 20 \text{ mm}$   
 $k = 60 \text{ mm}$ 




### III.4. - Etude du formage et de la stabilité

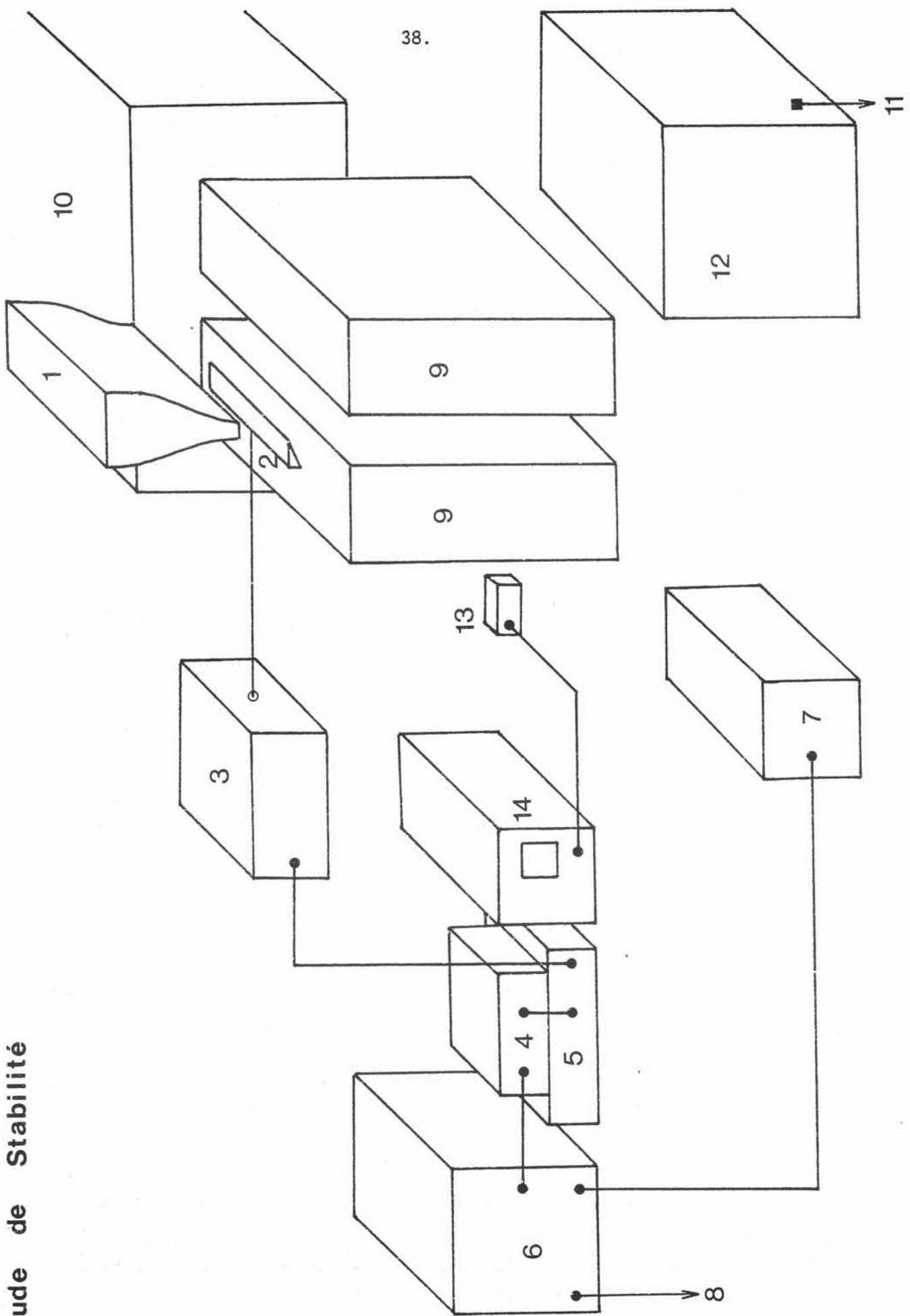
#### 1. L'installation :

Pour cette étude, le fluide se présente sous forme d'une lame mince qui s'écoule par gravité à partir d'un injecteur 1 étudié pour obtenir un jet aussi stable que possible : en particulier on évite toute sortie parallèle qui suit la contraction finale des injecteurs. L'angle de contraction joue aussi un rôle important ; de grands angles favorisent la fabrication de jets stables alors que de petits angles au sommet ont tendance à entraîner une pulvérisation. L'angle optimal de contraction se situerait(17) entre  $6^\circ$  et  $14^\circ$ . D'une façon générale, les injecteurs coniques sont à rejeter surtout s'ils possèdent une sortie parallèle. Les injecteurs de type parabolique avec une tangente à la sortie de l'ordre de  $10^\circ$  semblent bien convenir ; les injecteurs que nous utilisons sont fabriqués en résine pour des largeurs de lames de 40 mm ; l'épaisseur de lames suivant les injecteurs est de 0.5, 1, 2 et 4 mm (18) (19) (20) (21).



Pendant sa chute, la lame mince est perturbée de façon périodique par un profil 2 relié à la membrane d'un haut parleur 3 à l'aide d'une tige en fibre de carbone ; on peut faire varier la distance du profil à la lame ainsi que l'amplitude, la fréquence et la forme du signal appliqué au haut-parleur, à l'aide d'un amplificateur 5 commandé par un générateur

Etude de Stabilité



de fonctions 4 .

La visualisation est effectuée avec un appareil photographique et une caméra 8 que l'on peut synchroniser à la fréquence des éclairs 7 d'un stroboscope 6 .

Les inducteurs 9 sont placés parallèlement à la lame fluide et sont reliés au coffret de capacités 10 autorisant une variation de la fréquence du champ électromagnétique. L'ensemble du circuit RLC est relié au générateur HF 100 kW que l'on commande à partir d'un pupitre 12 . On vérifie la fréquence d'oscillation et la saturation des ferrites à l'aide d'une sonde électromagnétique 13 reliée à un oscilloscope numérique 14 .

## 2. Guidage et stabilisation de lames :

Plusieurs types d'expériences ont été effectués pour tester et caractériser les effet de guidage et de stabilisation du champ magnétique.

Tout d'abord la sortie de l'injecteur est positionnée dans un plan oblique par rapport au plan de symétrie de l'inducteur : l'angle entre le plan de la lame et le plan de symétrie peut varier de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ . Dans ces expériences la fréquence des courants est de 250 KHz environ, la puissance du générateur varie de 0 à 25 Kw, la largeur des lames est de 4 cm pour une épaisseur de 2.5 mm et le débit varie entre 1 et 30 litres/mn.

Il est possible de ramener le plan de la lame et le plan de symétrie de l'inducteur en coïncidence. Le résultat est d'autant plus facile à obtenir que le débit de métal est plus faible (faible quantité de mouvement du métal liquide) ou que l'intensité des courants dans l'inducteur est plus élevée. Le maximum d'effet mécanique induit par le champ magnétique correspond à une torsion de la lame sur une très courte distance. Une telle torsion très violente à faible débit et à fort champ magnétique entraîne une déstabilisation de lame en deux jets circulaires aux extrémités de celle-ci.

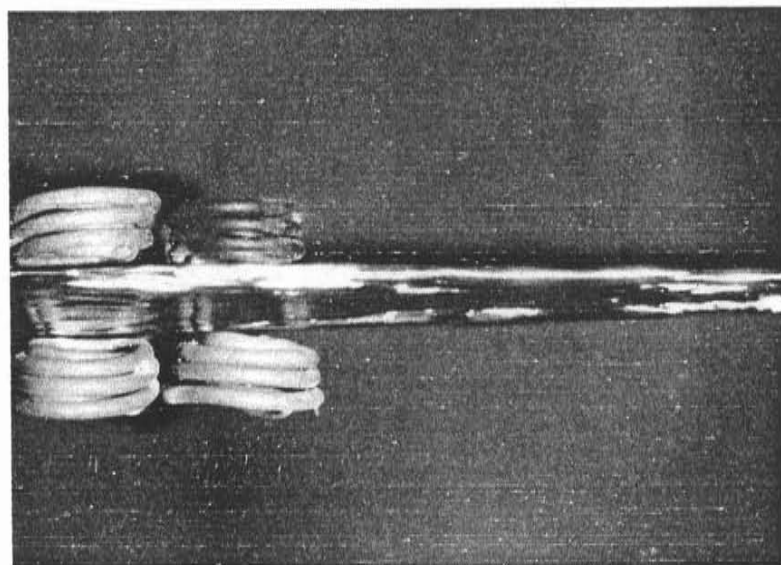
Dans un deuxième temps, on décentre la sortie de l'injecteur par rapport à l'axe de symétrie de l'inducteur, tout en restant perpendiculaire à l'axe des bobines. Par le positionnement des bobines et le réglage de l'intensité dans l'inducteur on peut soit recentrer la lame, soit la dévier jusqu'à des angles importants suivant le débit.



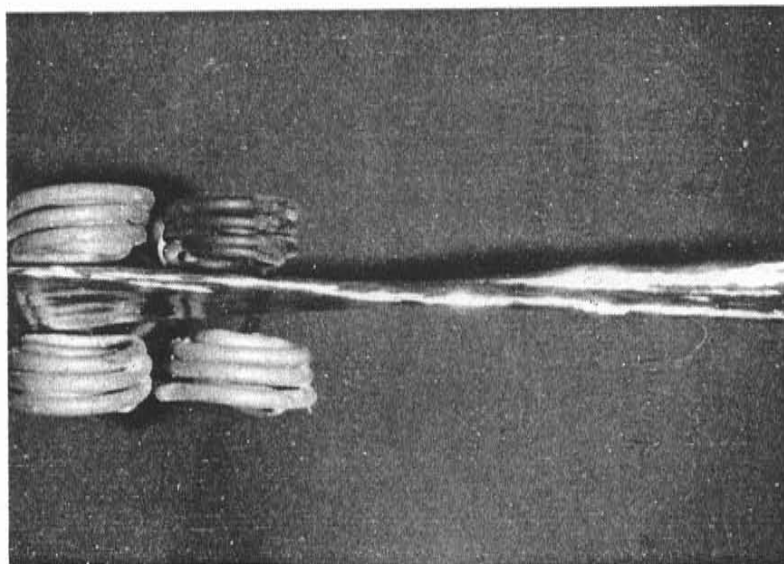
L'effet de cette configuration du champ magnétique sur des veines métalliques de faible dimension ( $< 6$  mm) est quasi inexistant. Ceci est probablement dû au fait qu'avec ce type d'inducteur, le gradient de champ est relativement faible à proximité de l'axe de symétrie.

On retrouve ce phénomène pour l'action du champ magnétique sur les fuseaux de lames en chute libre ; lorsque le fuseau est perpendiculaire à l'axe des bobines, on n'observe pas d'allongement significatif en fonction du champ magnétique. A l'inverse, lorsque le fuseau est parallèle à l'axe des bobines, on raccourcit nettement sa dimension par l'apport du champ magnétique.

Deux amplitudes sont appliquées pour perturber périodiquement la lame à sa sortie de l'injecteur : 0.5 mm et 1 mm. D'une manière générale, l'action du champ magnétique retarde la désagrégation de la lame et le phénomène est d'autant plus important que l'amplitude est plus élevée. La puissance générateur utilisée est de 25 kw, les fréquences des perturbations varient de quelques Hz à 200 Hz, et les débits de 10 à 30 l/mn. Les rapports maxima de l'augmentation par le champ magnétique de la longueur des lames avant désagrégation s'observent à faible débit et sont supérieurs à 3 pour 1.

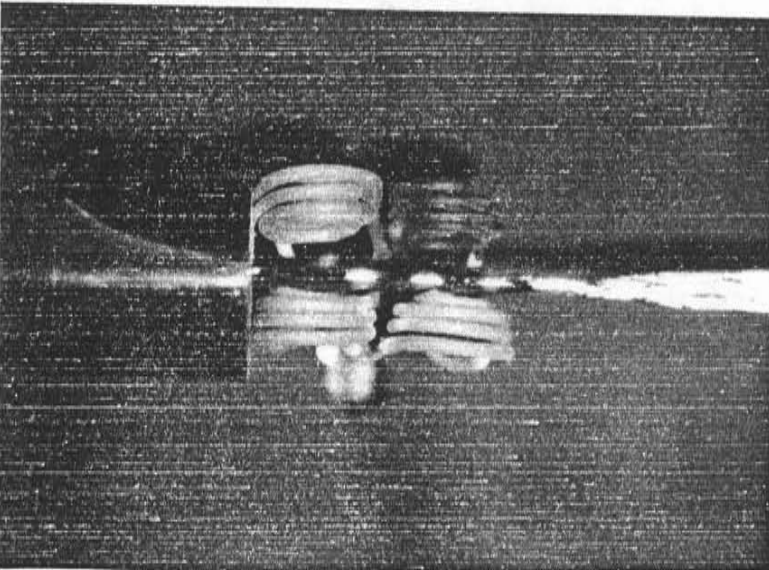


Sans champ magnétique

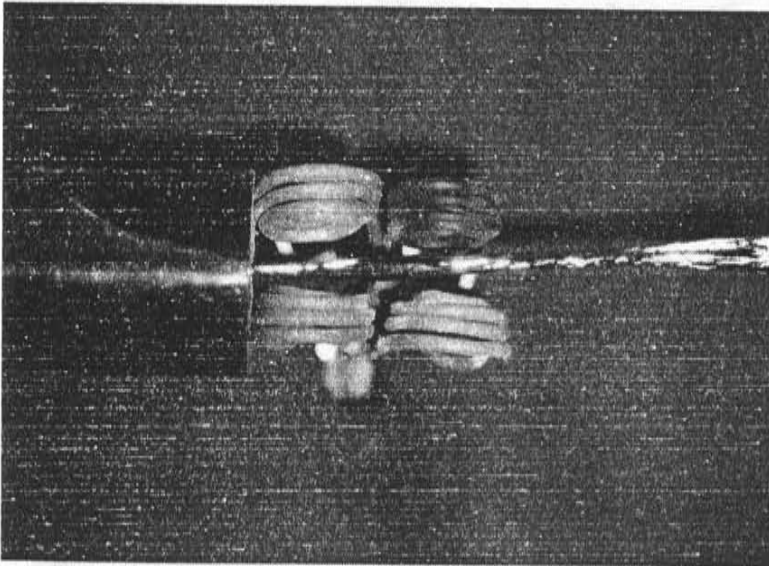


Avec champ magnétique (20 kW)

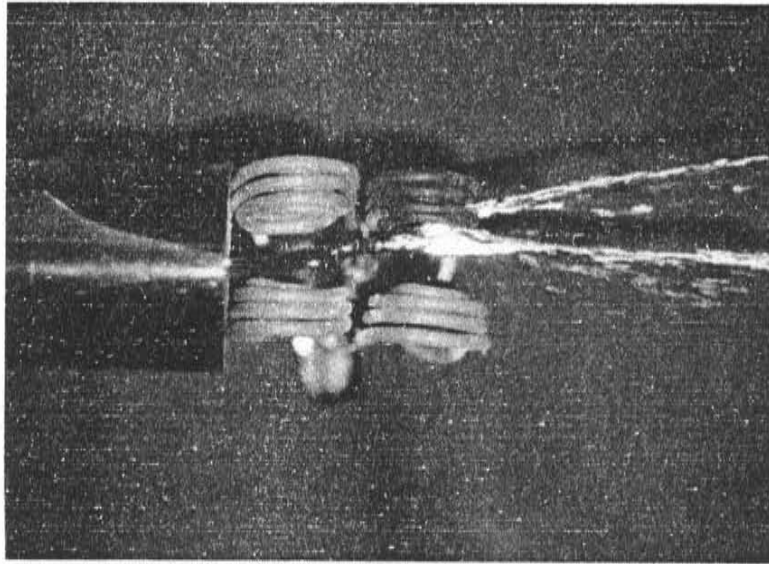
Rotation de lames possédant un angle de  $55^\circ$  avec l'axe des bobines  
 $f = 240 \text{ kHz}$  ;  $Q = 26 \text{ l/min}$



Sans champ magnétique

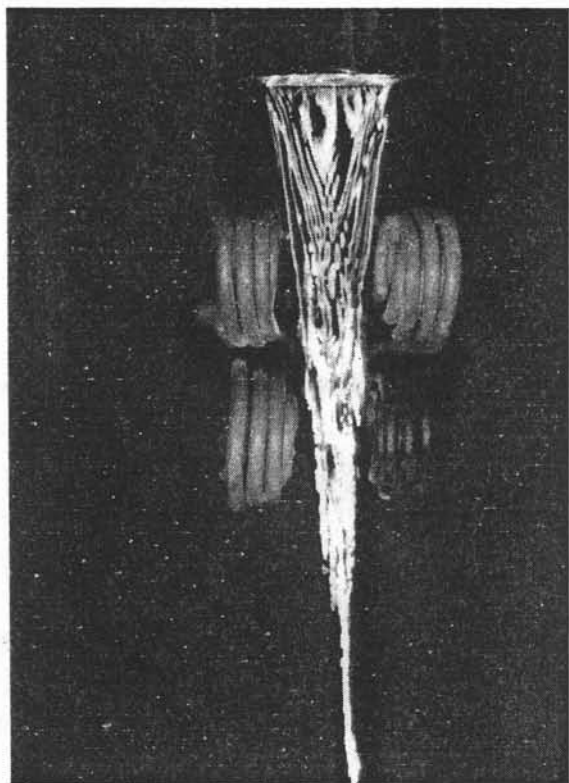


Avec champ magnétique (5 kW)

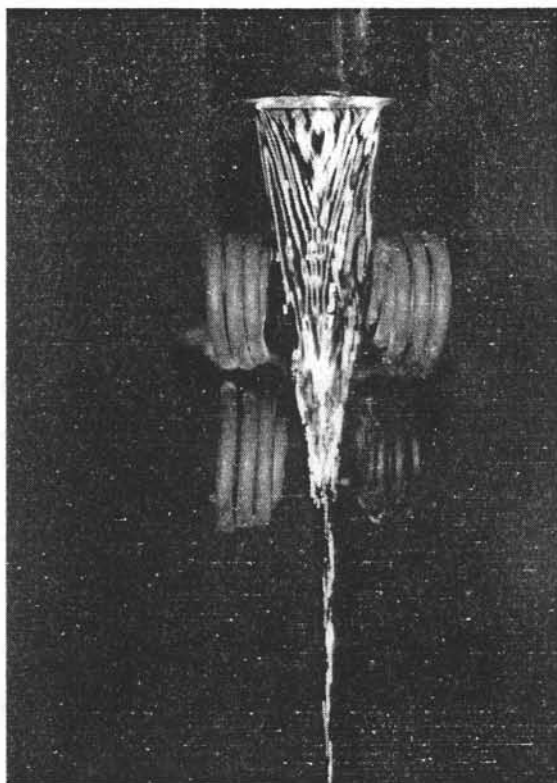


Avec champ magnétique (10 kW)

Recentrage et déviation de lames perpendiculaires à l'axe des bobines  
 $f = 240 \text{ kHz}$  ;  $Q = 3 \text{ l/mn}$

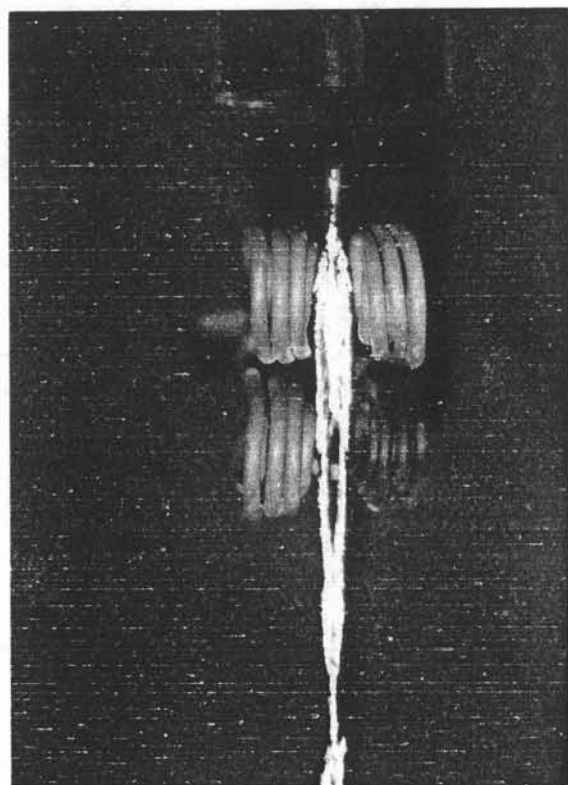


Sans champ magnétique

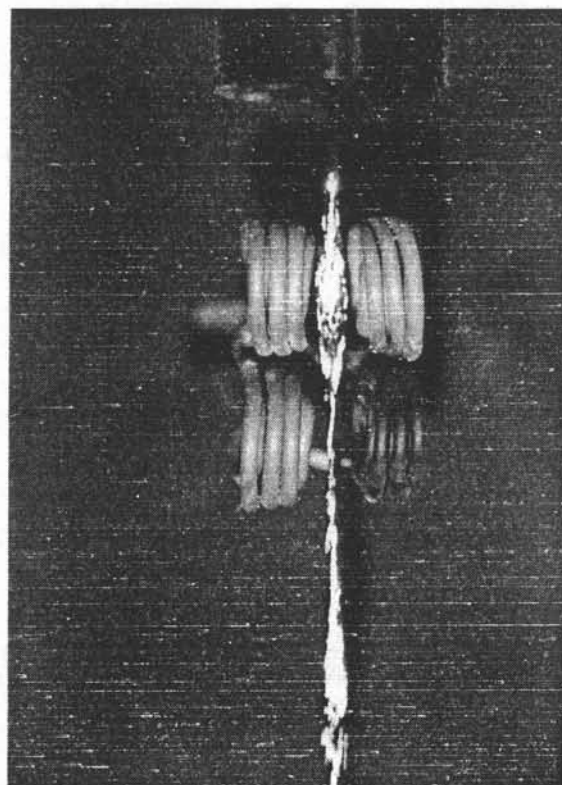


Avec champ magnétique (25 kW)

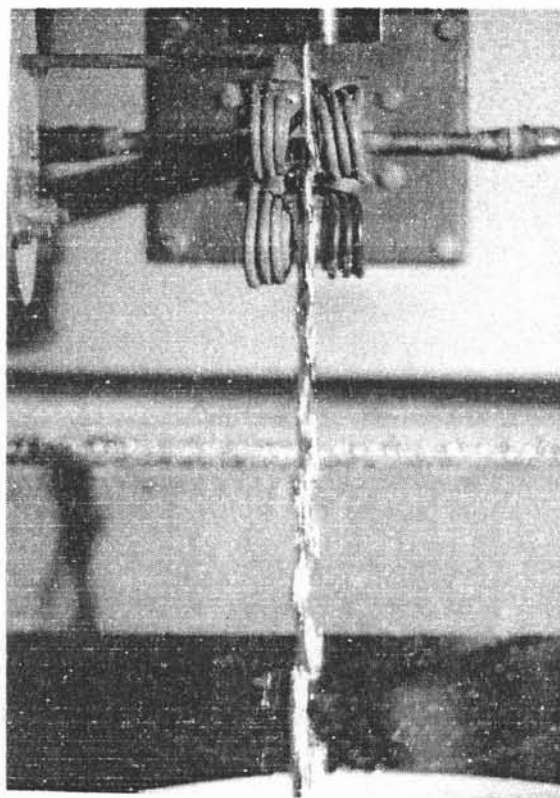
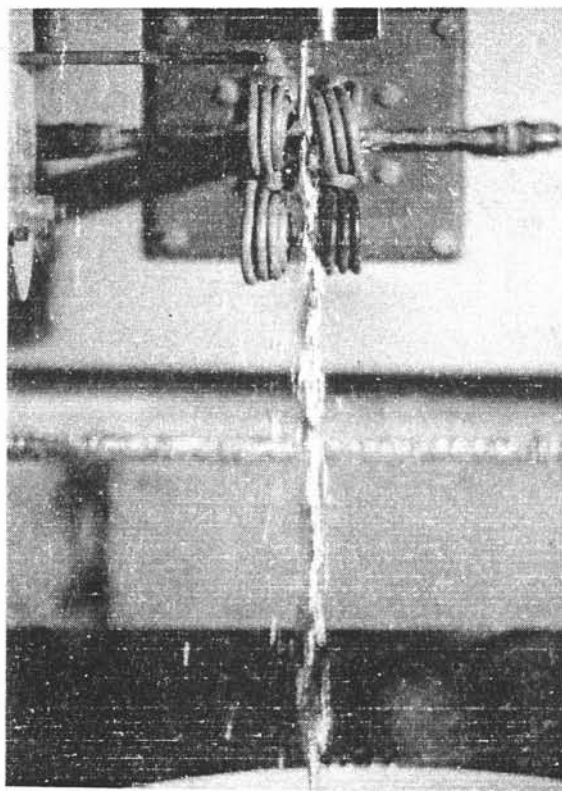
Réduction de fuseaux parallèles à l'axe des bobines  
 $f = 260 \text{ kHz}$  ;  $Q = 0.6 \text{ l/mn}$



Sans champ magnétique



Avec champ magnétique (25 kW)



Sans champ magnétique

Avec champ magnétique (25 kW)

Amplitude des perturbations : 0.5 mm

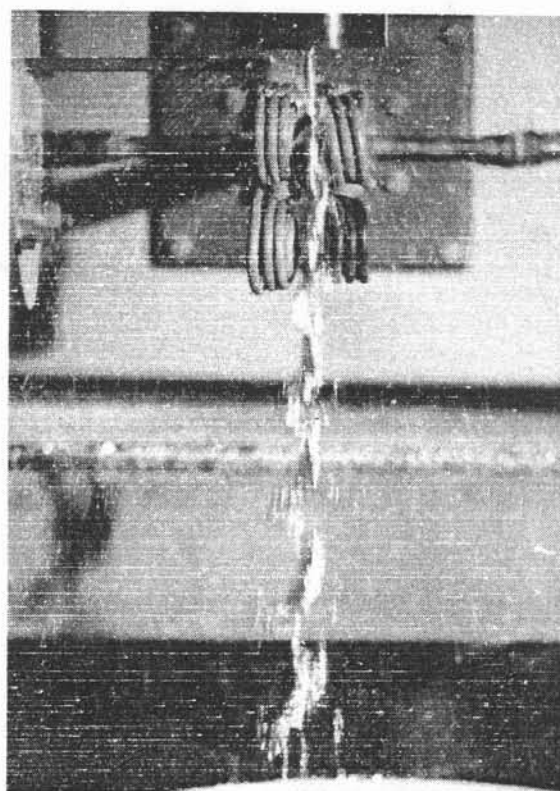
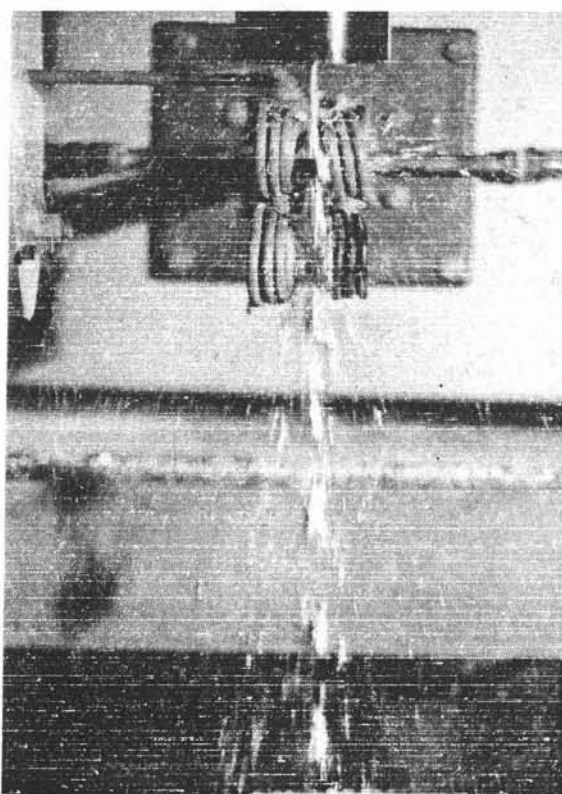
Evolution de perturbations périodiques sur une lame

$f = 240 \text{ kHz}$  ;  $Q : 15 \text{ l/mn}$

Amplitude des perturbations : 1 mm

Sans champ magnétique

Avec champ magnétique (25 kW)





## BIBLIOGRAPHIE

- (1) DUWEZ P., La recherche n° 88, p. 340, 1978.
- (2) CHEN H.S., "Structure and properties of metallic glasses", Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974, USA.
- (3) FOURNIER P., "Les applications des verres métalliques", CNRS, Ecole d'Hiver sur les Amorphes Métalliques. AUSSOIS, 1983.
- (4) ANTHONY T.R., CLINE H.E., "Dimensional variations in Newtonian-quenches metal ribbons formed by melt spinning and melt extraction", General Electric Research Laboratories, Schenectady, New York, 12301.
- (5) LIEBERMANN H.H., "Manufacture of amorphous alloy ribbons", General Electric Research Laboratories, Schenectady, New York, 12301.
- (6) CREMER P., "Fabrication industrielle de rubans amorphes", CNRS, Ecole d'hiver sur les Amorphes Métalliques, AUSSOIS, 1983.
- (7) BIGOT J., "Préparation des matériaux métalliques amorphes", CNRS, Ecole d'hiver sur les Amorphes Métalliques, AUSSOIS, 1983.
- (8) de FRAMOND R., ETAY J., GARNIER M., "Une application particulière du contrôle électromagnétique des surfaces libres de métaux fondus", 6ème Congrès Français de Mécanique, Lyon, 1983.
- (9) BRANCHER J.P., ETAY J., SERO-GUILLAUME O., "Formage d'une lame métallique liquide. Calculs et expériences", J.M.T.A., Vol. 2, n° 6, p. 977, 1983.
- (10) CHANDRASEKHAR S., "Hydrodynamic and hydromagnetic stability" Oxford University Press, 1961.
- (11) DRAZIN P.G., REID W.H., "Hydrodynamic stability", Cambridge University Press, 1981.
- (12) BETCHOV R., CRIMINALE W.O., "Spatial instability of the inviscid jet and wake", Phys. of Fluids, Vol. 9, n° 2, 1966.
- (13) HAGERTY W.W., SHEA J.F., "A study of the stability of plane fluid Sheets", J. Appl. Mech, 22. P. 509, 1955.
- (14) SQUIRE H.B., "Investigation of the instability of a moving liquid film", Brit. J. Applied Phys., 4, p. 167, 1953.
- (15) BETCHOV R., CRIMINALE W.O., "Stability of parallel flows", Academic Press, New York, 1967.
- (16) GARNIER M., MOREAU R., "Effect of finite conductivity on the stability of an interface submitted to a high frequency magnetic field", J.F.M., Vol. 127, p. 365, 1983.

- (17) TAYLOR J.J., HOYT J.W., "Effect of Nozzle Shape and Polymer Additives on water jet Appearance", Transaction of the ASME, Vol. 101, p. 304, 1979.
- (18) WEIMS D., "Stability of thin, radially moving liquid sheets", J.F.M., Vol. 87, n° 2, p. 289, 1978.
- (19) CRAPPER G.D., DOMBROWSKI N., JEPSON W.P., PYOTT G.A.D., "A note on the growth of Kelvin-Helmholtz waves on thin liquid sheets", J.F.M., Vol. 57, n° 4, p. 671, 1973.
- (20) TAYLOR G., "Formation of thin flat sheets of water", Proc. of the Roy. Soc. of London, Vol. 259 A, 1960.
- (21) DOMBROWSKI N., FRASER R.P., "A photographic investigation into the disintegration of liquid sheets", Phil. Trans., Vol. 247, A924, 1954.

C H A P I T R E    3

---

FORMAGE DE PROFILES CRUCIFORMES  
ET MOUVEMENT INTERNE DU FLUIDE

\*\*\*\*\*





Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement au formage de profilés cruciformes par un champ magnétique quadripolaire. Pour résoudre le problème magnétostatique à frontière libre, on met en place une méthode variationnelle. Les solutions obtenues sont comparées aux résultats expérimentaux effectués sur du mercure.

Les configurations calculées sont stables pour les petites déformations mais la situation est différente pour des perturbations de forte amplitude ; le problème de la stabilité conditionnelle est étudié dans le cas où la tension superficielle est grande.

Enfin, on étudie le mouvement interne induit par la partie rotationnelle des forces électromagnétiques dans la section profilée du jet liquide. Pour cela, on utilise une technique aux éléments finis avec une méthode de Galerkin pour résoudre les équations de Navier-Stokes.

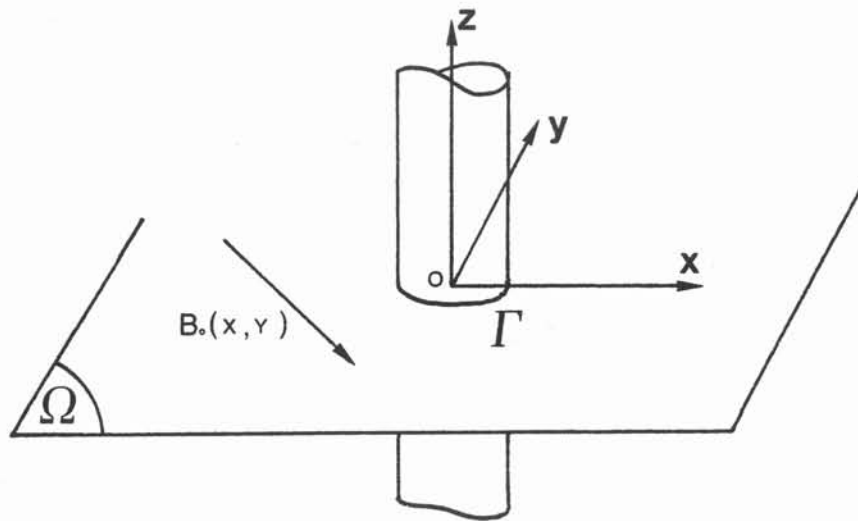
oooo



# I - FORMAGE DE PROFILES

## I.1. - Position du problème :

On considère un jet cylindrique d'axe  $Oz$ , placé dans un champ magnétique alternatif bidimensionnel  $B_0(x,y) \sin \omega t$ . Le champ magnétique obéit aux équations 1 du premier chapitre.  $\vec{B}$  peut être déterminé à partir du potentiel complexe  $F = \Phi + i\Psi$  holomorphe en dehors des circuits magnétisants  $\vec{B}$  par le potentiel complexe  $f = \phi + i\psi$  holomorphe dans  $\Omega$ .



La configuration d'équilibre dans un plan horizontal est contrôlée par l'action de la pression magnétique  $\frac{B^2}{2\mu}$  s'exerçant sur l'interface  $\Gamma$  et par les effets de tension superficielle  $\gamma/R$  où  $\gamma$  est le coefficient de tension superficielle et  $R$  le rayon de courbure local de la frontière libre. L'équation d'équilibre s'écrit sous la forme (1), (2).

$$\frac{\gamma}{R} + \frac{B^2}{2\mu} = \text{cte} \quad \text{sur } \Gamma \quad 2$$

Le problème est de déterminer la forme de  $\Omega$  sachant que  $B_0$  et le débit de métal liquide  $q$  sont imposés. La variation de l'aire  $A$  de la section du jet lors de son entrée dans l'induction est négligée; dans nos expériences, l'énergie cinétique du fluide ( $\rho q^2/2A^2$ ) est suffisamment grande devant l'énergie

magnétique ( $B^2/2\mu$ ). Dans ces conditions, on pose  $A = \pi R_0^2$  où  $R_0$  est le rayon de la section du jet non déformé avant qu'il ne pénètre dans la zone de champ électromagnétique (3)(4).

Le problème à résoudre est un problème à frontière libre gouverné par les équations 1 et 2 et la condition  $A = \pi R_0^2 = \text{cte}$ . La difficulté d'un tel système résulte du couplage qui existe entre la forme de la surface libre et la distribution du champ électromagnétique sur cette surface : en effet la valeur du champ magnétique en tout point de la surface libre dépend de la position de la surface libre et réciproquement. Il est intéressant, dans un tel problème, de minimiser une certaine fonctionnelle d'énergie caractéristique de l'énergie totale du système (5), (6).

## I.2. - Méthode variationnelle :

Ce point de vue, adopté par BRANCHER et SERO GUILLAUME conduit à un problème de minimisation avec contrainte dépendant d'un paramètre adimensionnel défini à partir du rapport des énergies de tension superficielle et magnétique. On montre -Moffatt et Sneyd- que la fonctionnelle  $E$  à minimiser est de la forme :

$$E = \gamma L - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Omega_\varepsilon} B^2 / 2\mu_0 \cdot dx dy + \sum_{k=1}^M \frac{\mu_0 I_k^2}{4\pi} \log \varepsilon \right) \quad 3$$

ceci dans le cas où le champ appliqué est créé par  $M$  courants filiformes représentés par  $M$  points dans  $\Omega$  ;  $I_k$  est la valeur du courant du  $k^{\text{ième}}$  circuit ;  $\Omega_\varepsilon$  est le domaine  $\Omega$  privé de  $M$  disques de rayons  $\varepsilon$  centrés sur les  $M$  points précédents ;  $L$  est ici la longueur de la courbe  $\Gamma$ . Le dernier terme de  $E$  (contributions de l'énergie électromagnétique) s'écrit sous la forme d'une limite car les circuits inducteurs sont supposés filiformes et introduisent une énergie magnétique infinie.

Dans le cas où le champ appliqué est uniforme, la fonctionnelle d'énergie à minimiser s'écrit sous la forme :

$$E = \gamma L - \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} b^2 dx dy + \frac{1}{\mu_0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \vec{B}_0 \cdot \vec{n} \phi dl$$

où  $\Gamma_R$  est le cercle de rayon  $R$  et  $\vec{n}$  la normale extérieure au domaine  $\Omega$ .

Cette fonctionnelle est utilisée par BRANCHER - ETAY - SERO GUILLAUME pour le calcul du formage de lame de métal liquide. Dans la suite nous utilisons la fonctionnelle 3 qui nous permet de traiter le formage de profilés cruciformes.

La minimisation de la fonctionnelle d'énergie est définie par rapport au domaine  $\Omega$ . On est alors amené à introduire les dérivées successives  $\frac{\partial E}{\partial \Omega}$ ,  $\frac{\partial^2 E}{\partial \Omega^2}$  de  $E$  par rapport à  $\Omega$  ( $\frac{\partial E}{\partial \Omega} = 0$  donne l'équation d'équilibre 2 et  $\frac{\partial^2 E}{\partial \Omega^2}$  permet de tester la stabilité). Dans le cas général, à partir d'un domaine et d'une énergie initiale on fait décroître l'énergie par pas successifs en associant à sa dérivée par rapport au domaine un champ de déplacement lié à la variation du domaine (7)

Dans notre cas le problème est bidimensionnel ; aussi l'ensemble des domaines  $\Omega$  successifs est introduit à partir d'une famille de transformations conformes ; on montre, en appliquant le théorème de Riemann sur les transformations, qu'il existe une fonction analytique unique  $\xi(z)$  qui transforme la surface  $\Gamma$  en un cercle de rayon unité avec les conditions à l'infini  $\xi(\infty) = \infty$  et  $\xi'(\infty)$  réel. La fonction inverse  $z(\xi)$  est aussi analytique et peut être définie par une série de Laurent :

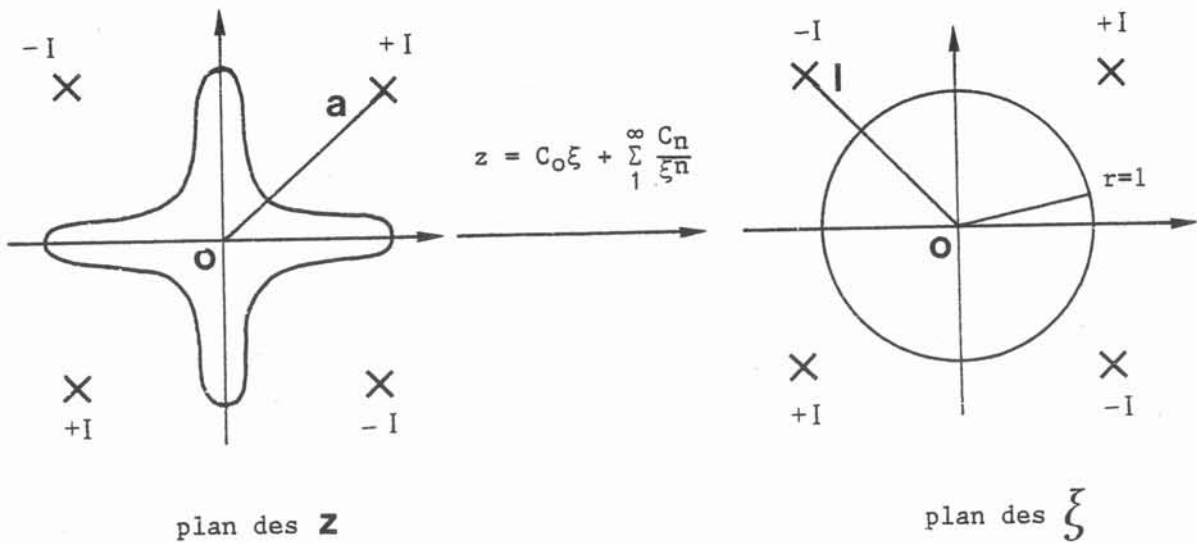
$$z = C_0 \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\xi^n}$$

où  $C_0, C_1, \dots, C_n$  sont des coefficients complexes.

La fonctionnelle d'énergie peut alors être calculée en fonction des seuls paramètres d'espace  $C_0, C_1, \dots, C_n$ . En tronquant la série de Laurent au terme de rang  $N$ , on se ramène à un problème de minimisation d'une fonction de  $N$  variables que l'on résoud à partir d'une méthode du gradient.

### I.3. - Calcul de profilés cruciformes :

Le formage de profilés cruciformes s'obtient à partir d'un inducteur quadripolaire parcouru par quatre courants déphasés deux à deux de  $\pi$ , de valeur efficace  $I$ . En réduisant les dimensions par rapport à  $R_0$ , on obtient dans le plan des  $z$  et dans le plan des  $\xi$  la configuration suivante :



On écrit la longueur  $L$  sous une forme qui consiste à considérer une fonction  $r(\xi)$  sous forme de série de Laurent telle que

$$r^2(\xi) = \frac{dz}{d\xi}$$

$$\text{alors } L = \int_{\Gamma} |dz| = \int_{\Gamma} |dz/d\xi| |d\xi| = \int_{\Gamma} r(\xi) \bar{r}(\xi) d\theta$$

$$\text{c'est-à-dire } L = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} r_n^2$$

$$\text{avec } r_0 = \sqrt{C_0} ; \quad r_1 = 0 ; \quad r_2 = -\frac{C_1}{2\sqrt{C_0}} ; \quad r_3 = -\frac{C_3}{\sqrt{C_0}}$$

$$\text{et pour } n \geq 4 \quad r_n = -\frac{1}{2r_0} \left[ (n-1) C_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-2} r_k r_{n-k} \right]$$

Le calcul de l'énergie magnétique utilise la méthode des images appliquée à la configuration circulaire du plan  $\xi$ . Un terme supplémentaire apparaît du fait que :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log \varepsilon &= \lim_{z \rightarrow z_p} \log |z - z_p| = \lim_{\xi \rightarrow \xi_p} \log \left| \frac{z - z_p}{\xi - \xi_p} \right| |\xi - \xi_p| \\
&= \lim_{\xi' = |\xi - \xi_p| \rightarrow 0} (\log \varepsilon' + \log \left| \frac{dz}{d\xi} \right|_p)
\end{aligned}$$

On obtient alors l'expression de la fonctionnelle d'énergie sous forme adimensionnelle :

$$(4) \quad E = kL + \log \frac{1^4 + 1}{1(1^4 - 1)} - \log \left| \frac{dz}{d\xi} \right|_{\xi = 1} e^{i\pi/4}$$

$$\text{où } k = \frac{\pi \gamma R_o}{\mu_o I^2}$$

et  $l$ , distance entre le centre  $O$  et un conducteur dans le plan des  $\xi$ , satisfait à :

$$a e^{i\pi/4} = C_o l e^{i\pi/4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{l^n e^{in\pi/4}}$$

où  $a$  est la distance entre le centre  $O$  et un conducteur dans le plan des  $z$ .

La conservation de l'aire  $A = \pi R_o^2$  nous donne une condition sur les coefficients de la série de Laurent :

$$|C_o|^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n |C_n|^2$$

Enfin, la solution recherchée doit être invariante par rotation de  $\pi/2$  et par symétrie d'axe  $Ox$ . Les  $C_n$  sont donc réels et tels que seuls  $C_o$  et  $C_{4k-1}$  soient différents de zéro. L'organigramme général du calcul est donné en annexe.



#### I.4. - Approximation lorsque k est élevé :

Lorsque l'effet de tension superficielle est important vis à vis de l'effet de pression électromagnétique, les mesures expérimentales ne sont pas significatives car les déformations du jet sont très faibles. On compare alors les résultats numériques avec une approximation au premier ordre du phénomène.

Au premier ordre, la pression magnétique  $\frac{B^2}{2\mu_0}$  est approchée par celle qui apparaît dans la configuration non déformée et que l'on calcule par la méthode des images. L'équation d'équilibre (2) s'écrit alors sous sa forme réduite :

$$(5) \quad \frac{1}{R} + \varepsilon e(1-e)^2 \frac{1 - \cos 4\theta}{(e^2 + 1 + 2e \cos 4\theta)^2} = \text{Cte}$$

$$\text{où } e = \frac{R_0^4}{a^4} < 1, \quad \varepsilon = \frac{4 \mu_0 I^2}{\pi^2 R_0 \gamma} \ll 1$$

et où R est le rayon de courbure

La forme de la section légèrement déformée est donnée en coordonnées polaires par :

$$\rho = r/R_0 = 1 + \varepsilon' f(\theta) \quad \text{avec } \varepsilon' = 0 \quad (\varepsilon)$$

le rayon de courbure est donné par :

$$\frac{1}{R} = (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'') (\rho^2 + \rho'^2)^{-3/2}$$

c'est-à-dire, lorsqu'on développe  $f(\theta)$  en série de Fourier :

$$\frac{1}{R} = \varepsilon' \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) a_n \cos n\theta + 0 \quad (\varepsilon'^2)$$

On peut vérifier que l'aire de la section  $A = \pi R_0^2$  est conservée au premier ordre. L'équation (5) donne la condition  $\varepsilon' = e(1-e)^2 \varepsilon$  et les coefficients  $a_n$  se calculent à partir des coefficients de Fourier de la fonction :

$$\frac{1 - \cos 4\theta}{(e^2 + 1 + 2e \cos 4\theta)^2}$$

$$a_n = 0 \quad \text{si } n \neq 4p$$

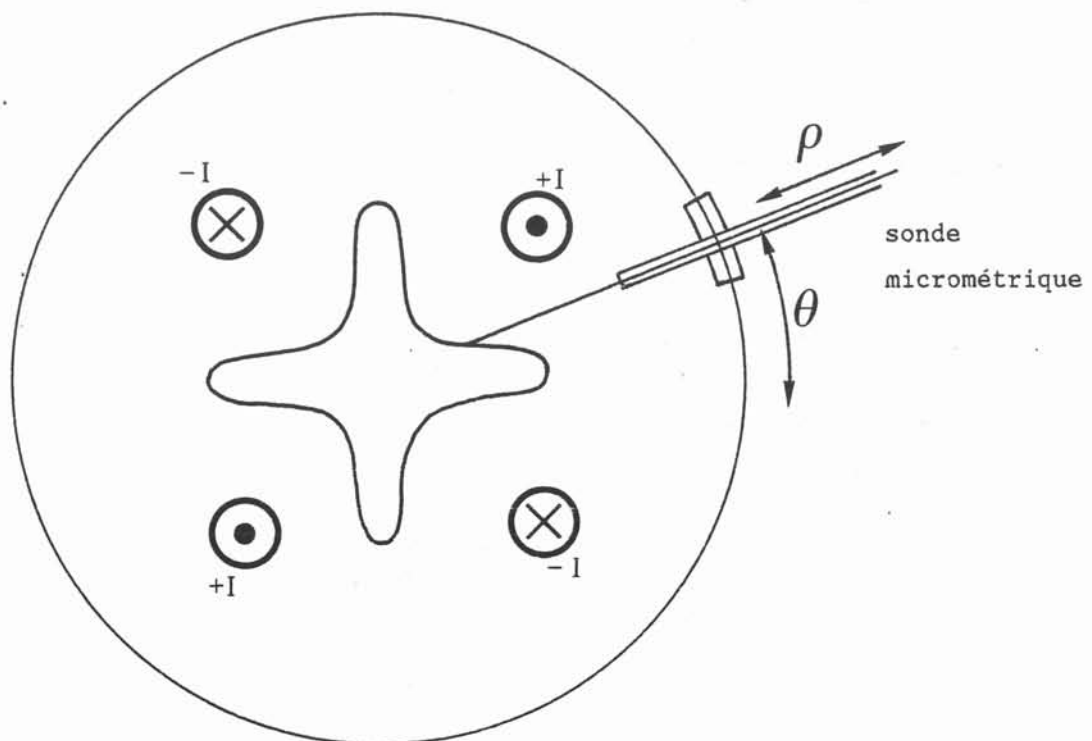
$$a_{4p} = -\frac{8}{\pi(16p^2-1)} \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 4\theta}{(e^2+1 + 2e \cos 4\theta)} = \cos 4p\theta \, d\theta$$

et le calcul de la déformation au premier ordre donne :

$$r/R_0 = 1 + \varepsilon \sum_{p=1}^{+\infty} a_{4p} \cos 4p\theta + O(\varepsilon^2)$$

### I.5. - Expérimentation :

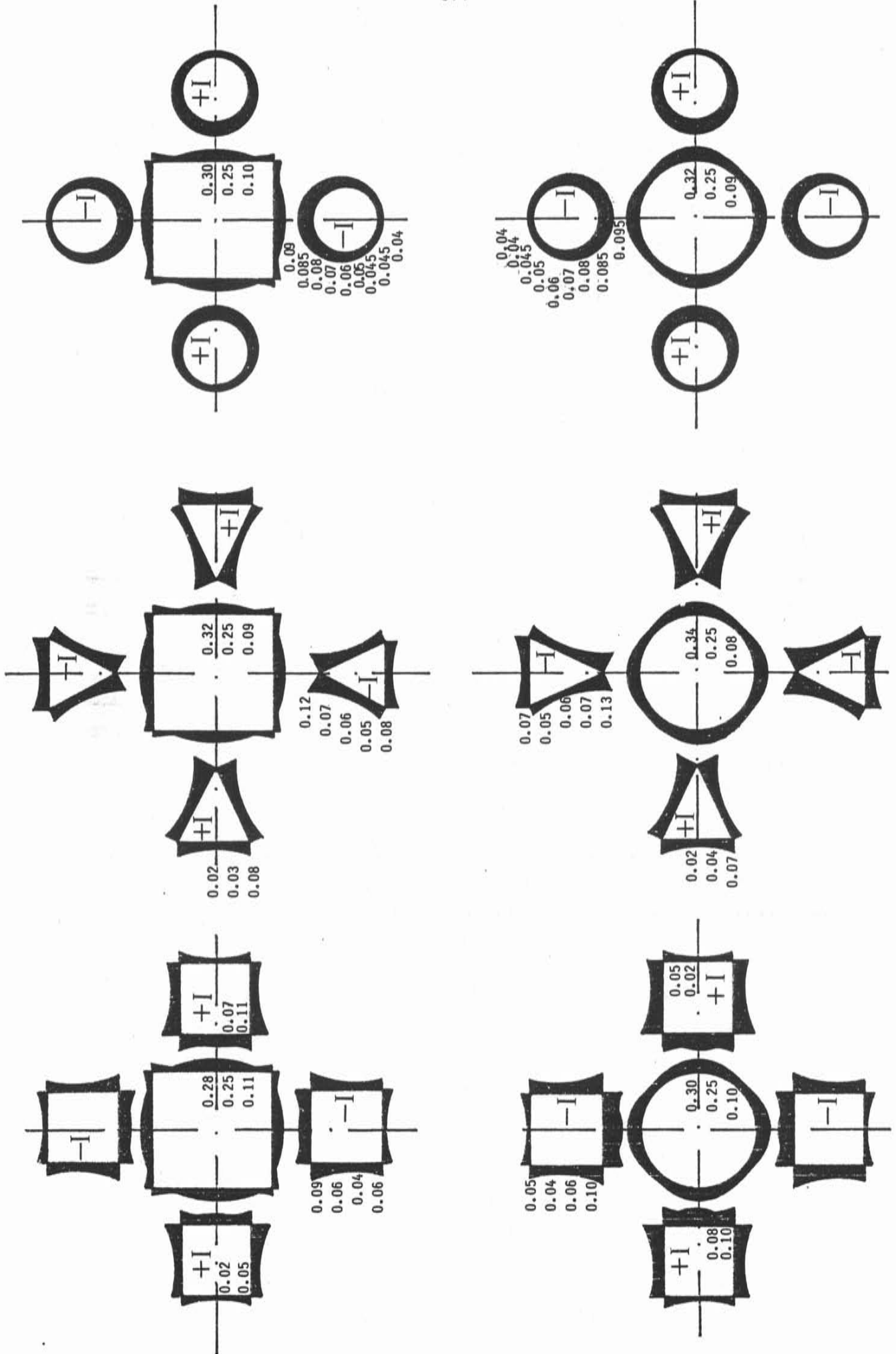
Le dispositif d'étude est du même type que celui décrit dans le chapitre précédent. Dans la cellule d'essai, rendue hermétique par mesure de sécurité, le mercure s'écoule par gravité à partir d'un injecteur (nid d'abeille et convergent) sous forme d'un jet circulaire stable et passe au travers d'un inducteur quadripolaire. Dans une section horizontale, les quatre axes verticaux des conducteurs constituant l'inducteur se situent au sommet d'un carré dont on peut faire varier la dimension des côtés. Un autre réglage permet d'assurer à l'inducteur une conicité verticale nécessaire pour suivre le jet dans sa chute, l'accélération due à la gravité faisant diminuer sa section.



Cet inducteur associé à une batterie de condensateurs est traversé par un courant alternatif de fréquence élevée ( $\sim 250$  kHz) conduisant à une épaisseur de peau électromagnétique de l'ordre du millimètre ; c'est-à-dire que les expériences sont menées avec un rapport  $\delta/r$  d'environ 0,1 où  $r$  est le rayon initial du jet. D'un point de vue technologique, il est difficile de descendre à des profondeurs de peau  $\delta$  plus petites pour se rapprocher de l'hypothèse "épaisseur de peau nulle" ; en effet, diviser la peau électromagnétique par deux revient à multiplier la fréquence par quatre, c'est-à-dire à travailler aux environs du MHz : à ces fréquences et avec les intensités que nous utilisons, on favorise la fabrication spontanée de plasmas... et une expérience a confirmé ce phénomène !

Une difficulté qui rend la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux délicate est l'utilisation dans le calcul d'inducteurs filiformes ; dans l'expérimentation, étant donné les intensités de courant nécessaires pour le formage, les inducteurs ont une dimension proche du rayon du jet et il faut alors tenir compte de la répartition des courants par rapport au domaine théorique. A titre d'exemple, on donne les résultats de la répartition des densités de courants pour trois géométries d'inducteurs et pour deux géométries de charges données. Ces calculs sont établis avec le programme CARIBE qui consiste à découper le domaine conducteur en plusieurs spires coaxiales et à en déduire la répartition des courants à partir du potentiel vecteur (8).

Pour le système de mesure, on utilise le passage du courant entre le jet de mercure et une pointe en tungstène reliée à une table micrométrique en système de coordonnées polaires ; étant donné la stabilité des jets obtenus, la précision de la mesure est d'environ 0.1 mm.



Répartition des densités de courant pour les inducteurs quadripolaires (% I).

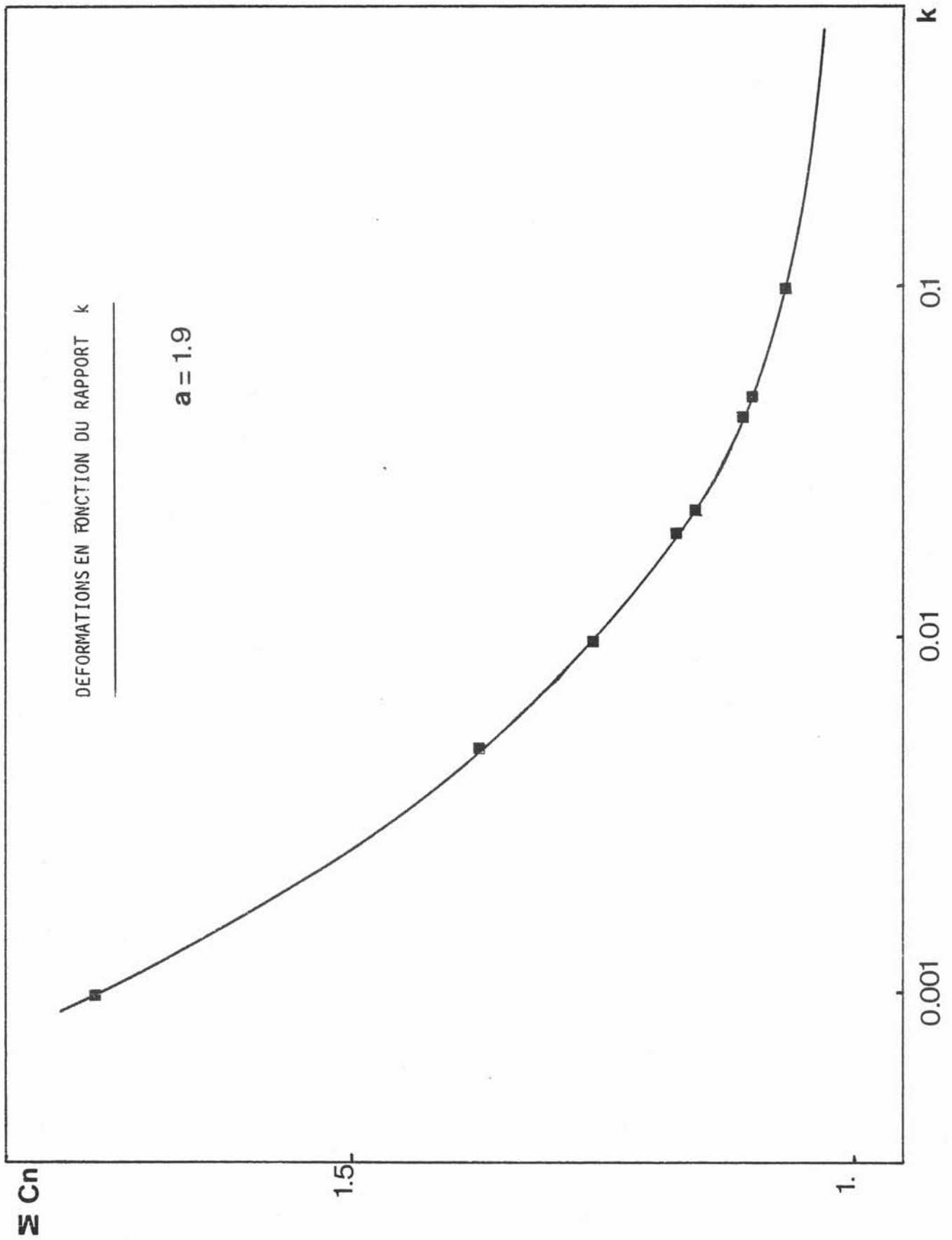
### I.6. - Résultats :

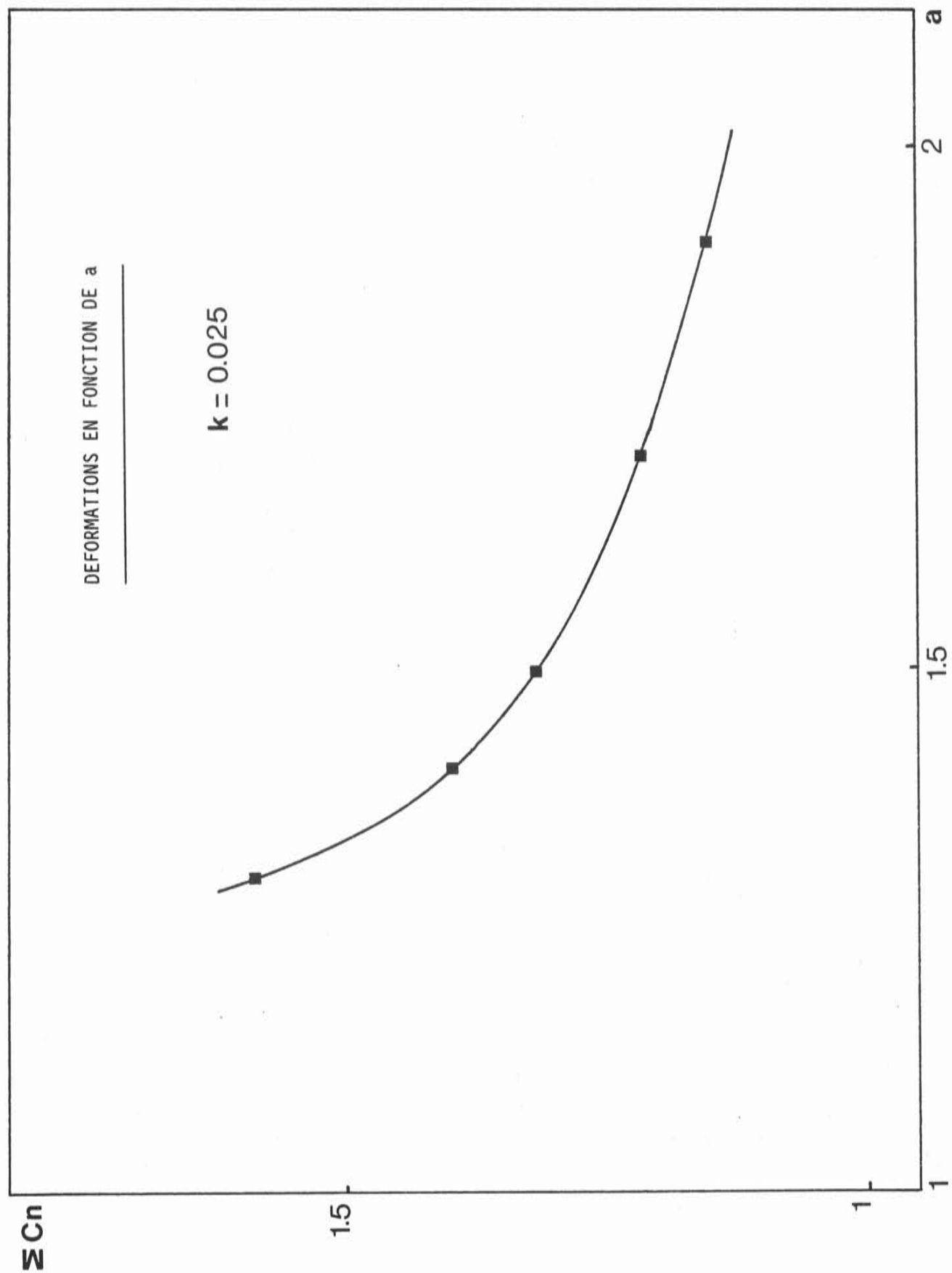
Les résultats numériques sont donnés en fonction du rapport adimensionnel  $k$ , significatif de l'effet des forces de tension superficielle vis à vis des forces électromagnétiques, de la longueur adimensionalisée  $a$  entre le centre  $O$  et les conducteurs et du nombre  $N$ , rang de troncature de la série de Laurent. On donne les coefficients de la transformation conforme correspondante à chaque résultat, l'énergie totale finale, la longueur entre le centre  $O$  et les conducteurs dans l'espace  $\xi$  et la précision de la convergence (d'une façon générale, une dizaine d'itérations successives sont nécessaires pour atteindre cette convergence). Enfin, un test sur la conformité de la transformation est effectué.

L'expérimentation ne permet pas d'avoir une dynamique sur le rapport  $k$  très importante ; au dessus d'une certaine valeur ( $k \sim 0.1$ ) les déformations deviennent trop faibles pour permettre une mesure correcte et en dessous d'une valeur  $k \sim 0.01$ , l'intensité des courants qui traversent les inducteurs devient suffisamment importante pour poser des problèmes technologiques de refroidissement. Les comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux sont traduites sur le tableau suivant en fonction de l'allongement maximum du profilé, ce qui correspond à la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  de la série de Laurent. Dans le cas expérimental, la dimension " $a$ " caractérise la distance entre le centre  $O$  de l'inducteur et un "barycentre" de la répartition des courants dans les inducteurs que l'on calcule à partir des résultats obtenus par le programme CARIBE. Dans les expériences, le débit était de 650 cc/s et le diamètre initial du jet de 15 mm. La longueur de formage est d'environ 20 cm.

k	a	$\sum c_n$ mesuré	$\sum c_n$ calculé
0.1	1.5		1.12
	1.7	1.07	1.08
	1.9	1.05	1.06
0.05	1.3		1.33
	1.5		1.20
	1.7	1.09	1.13
	1.9	1.08	1.09
0.044	1.9	1.11	1.10
0.025	1.3		1.58
	1.4		1.40
	1.5		1.32
	1.7	1.15	1.21
	1.9	1.14	1.15
0.02	1.5		1.36
	1.9	1.16	1.18
0.01	1.5		1.65
	1.9		1.26
0.005	1.9		1.37
0.001	1.9		1.75
	2.0		1.62

Il est intéressant de noter l'évolution de sa somme  $\sum C_n$ , c'est-à-dire de l'allongement, en fonction des deux paramètres k et a, le premier étant facilement réglable expérimentalement (car directement lié à l'intensité) et le deuxième ne dépendant que de la géométrie. Ces deux courbes sont issues des résultats numériques.







$K = 0.100$  ;  $A1 = 1.5$  ; et  $N = 10$

\*\*\*\*\*

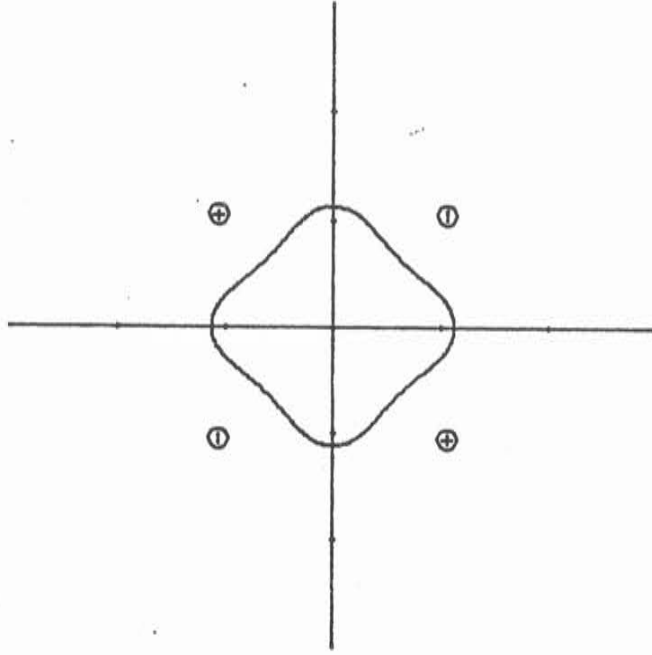
C-1 = 1.02158  
 C 3 = 1.18457E-01  
 C 7 = -1.44215E-02  
 C11 = 2.35619E-03  
 C15 = -4.18694E-04  
 C19 = 7.71519E-05  
 C23 = -1.44904E-05  
 C27 = 2.75236E-06  
 C31 = -5.26787E-07  
 C35 = 1.00679E-07  
 C39 = -1.93583E-08

Energie : 0.56018640

R1 = 1.5033

Norme sup du gradient : 7.3050E-07

La transformation obtenue est bien conforme



K = 0.020 ; A1 = 1.500 ; et N = 10

\*\*\*\*\*

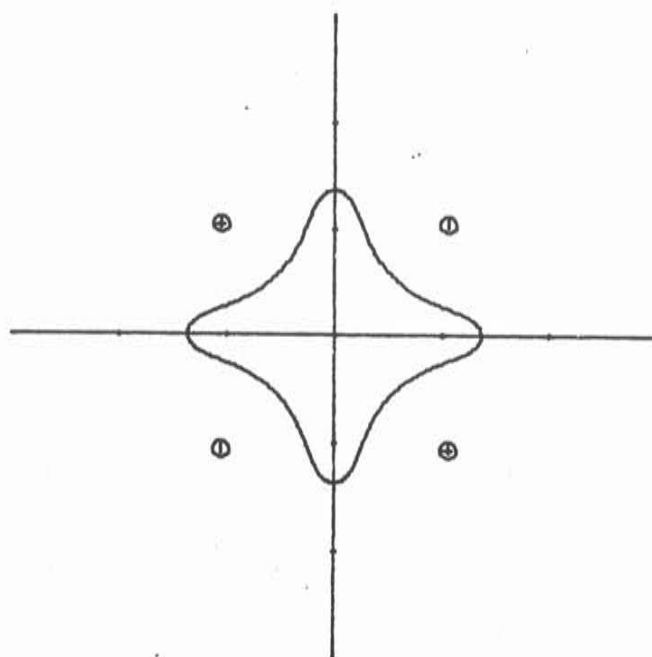
C-1 = 1.12357  
C 3 = 2.84891E-01  
C 7 = -5.00859E-02  
C11 = 1.07300E-02  
C15 = -2.44869E-03  
C19 = 5.70798E-04  
C23 = -1.34696E-04  
C27 = 3.19094E-05  
C31 = -7.86101E-06  
C35 = 1.32519E-06  
C39 = -1.01648E-06

Energie : -0.00129102

R1 = 1.4263

Norme sup du gradient : 9.8466E-05

La transformation obtenue est bien conforme



$K = 0.010$  ;  $A1 = 1.5$  ;  $N = 10$

\*\*\*\*\*

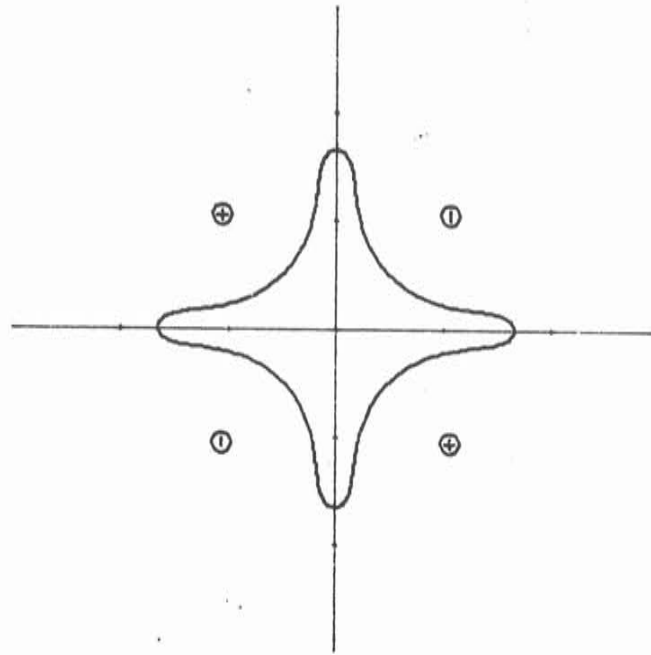
C-1 = 1.29569  
 C 3 = 4.42878E-01  
 C 7 = -1.05716E-01  
 C11 = 3.09637E-02  
 C15 = -9.65230E-03  
 C19 = 3.07200E-03  
 C23 = -9.89891E-04  
 C27 = 3.21032E-04  
 C31 = -1.04545E-04  
 C35 = 3.40581E-05  
 C39 = -1.00884E-05

Energie : -0.09040483

R1 = 1.3195

Norme sup du gradient : 7.7887E-07

La transformation obtenue est bien conforme



$K = 0.001$  ;  $A1 = 2.0$  ;  $N = 10$

\*\*\*\*\*

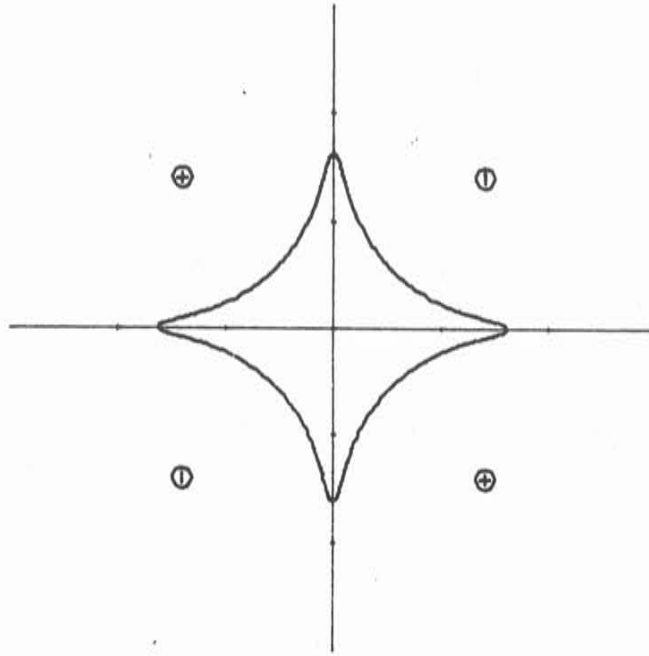
C-1 = 1.24282  
 C 3 = 4.20670E-01  
 C 7 = -4.38764E-02  
 C11 = 4.53211E-03  
 C15 = -7.98010E-04  
 C19 = -1.52854E-05  
 C23 = -5.13196E-05  
 C27 = -1.92486E-05  
 C31 = -1.01427E-05  
 C35 = -4.99763E-06  
 C39 = -2.70373E-06

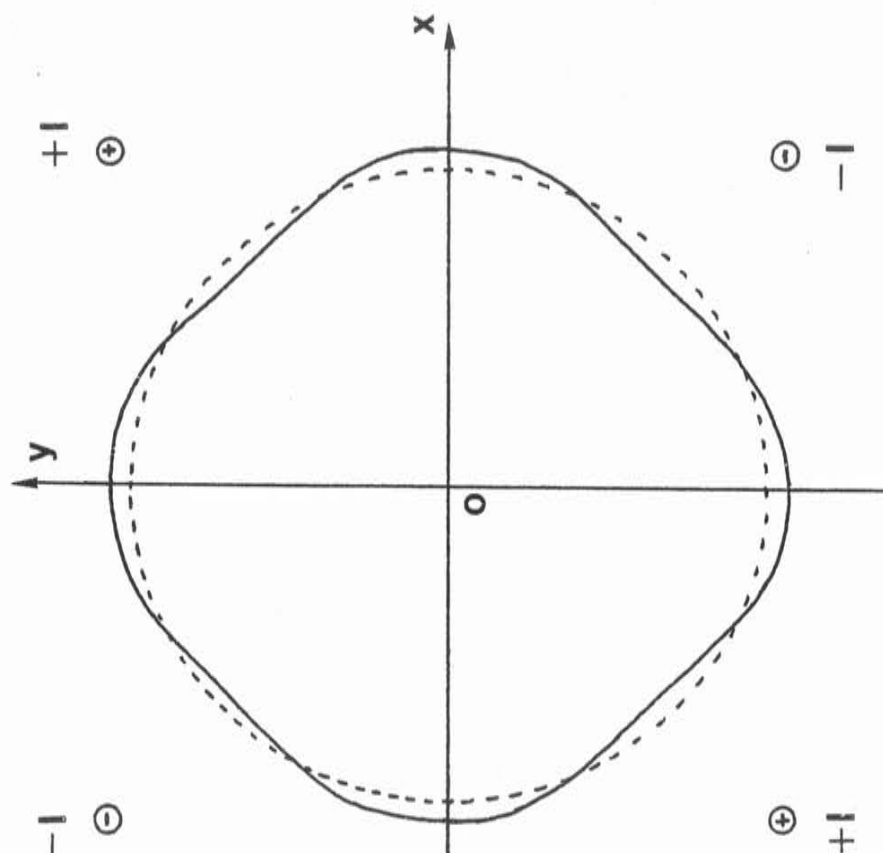
Energie : -0.59872520

R1 = 1.6814

Norme sup du gradient : 1.7372E-07

La transformation obtenue est bien conforme





Approximation  
lorsque le  
rapport  $k$   
est élevé

$K = 0.050$  ;  $A1 = 1.50$  ;  $Alfa1 = 40.00$  degrés ;  $N = 10$

\*\*\*\*\*

$dx = 1.149$  ;  $dy = 0.964$

C-1 = 1.07726

C 1 = -3.08055E-01

C 5 = 5.81296E-02

C 9 = -9.51819E-03

C13 = 6.26043E-04

C17 = 1.56202E-04

C 3 = 1.26165E-01

C 7 = 4.74731E-04

C11 = -3.30859E-03

C15 = 8.32191E-04

C19 = -9.80537E-05

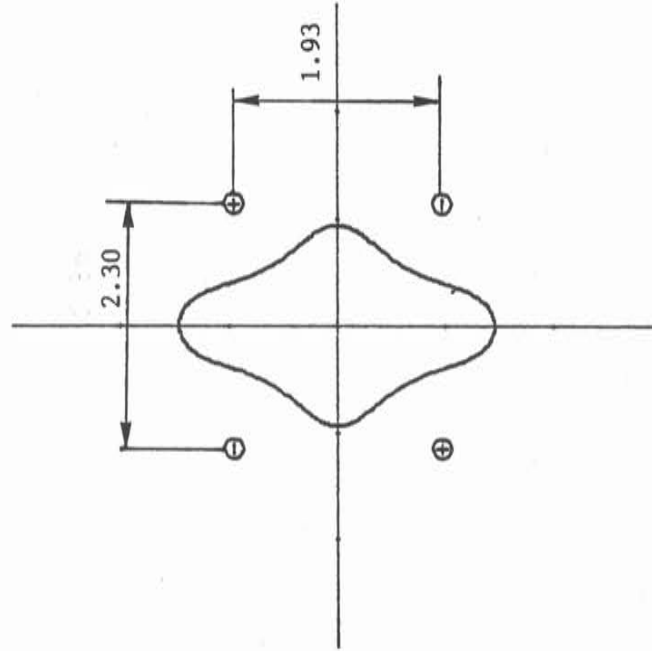
Energie : 0.21728260

R1 = 1.4899

Tétal = 33.63 degrés

Norme sup du gradient : 9.7413E-05

La transformation obtenue est bien conforme



$K = 0.010$  ;  $A1 = 2.24$  ;  $Alfa1 = 26.57$  degrés ;  $N = 10$

\*\*\*\*\*

$dx = 2.000$  ;  $dy = 1.000$

C-1 = 1.03641		
C 1 = -2.15177E-01	C 3 = 8.88728E-02	
C 5 = 2.85037E-02	C 7 = 3.44561E-03	
C 9 = -5.63990E-04	C11 = -4.37567E-04	
C13 = -1.45582E-04	C15 = -3.79022E-05	
C17 = -1.10409E-05	C19 = 8.71460E-07	

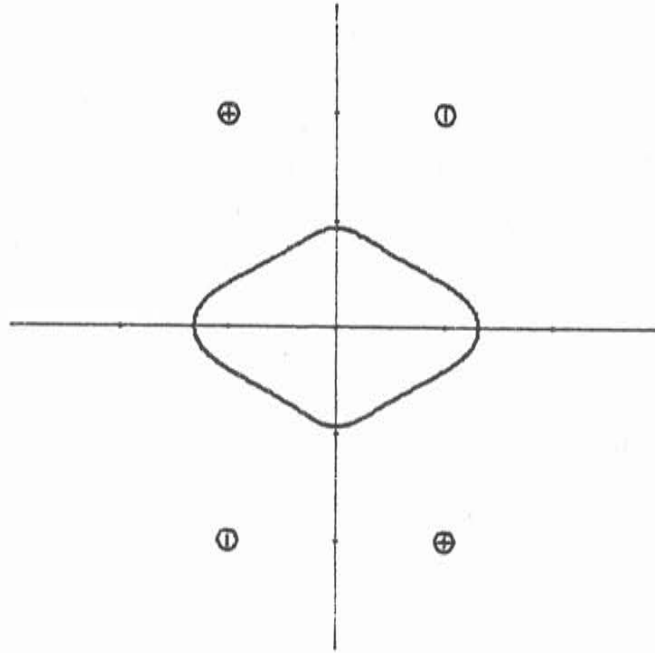
Energie : -0.47552260

R1 = 2.2188

Téta1 = 24.88 degrés

Norme sup du gradient : 4.3624E-04

La transformation obtenue est bien conforme



$K = 0.010$  ;  $A1 = 2.02$  ;  $Alfa1 = 7.13$  degrés ;  $N = 4$

\*\*\*\*\*

$dx = 2.000$  ;  $dy = 0.250$

C-1 = 1.00585

C 1 = -1.04019E-01

C 3 = 1.31170E-02

C 5 = 8.31560E-03

C 7 = 2.57950E-03

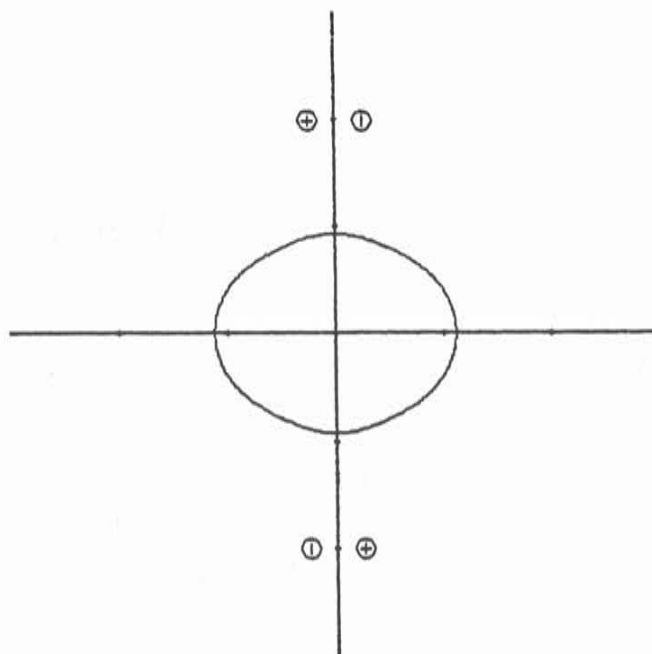
Energie : 0.77098720

R1 = 2.0513

Téтал = 6.81 degrés

Norme sup du gradient : 8.6717E-04

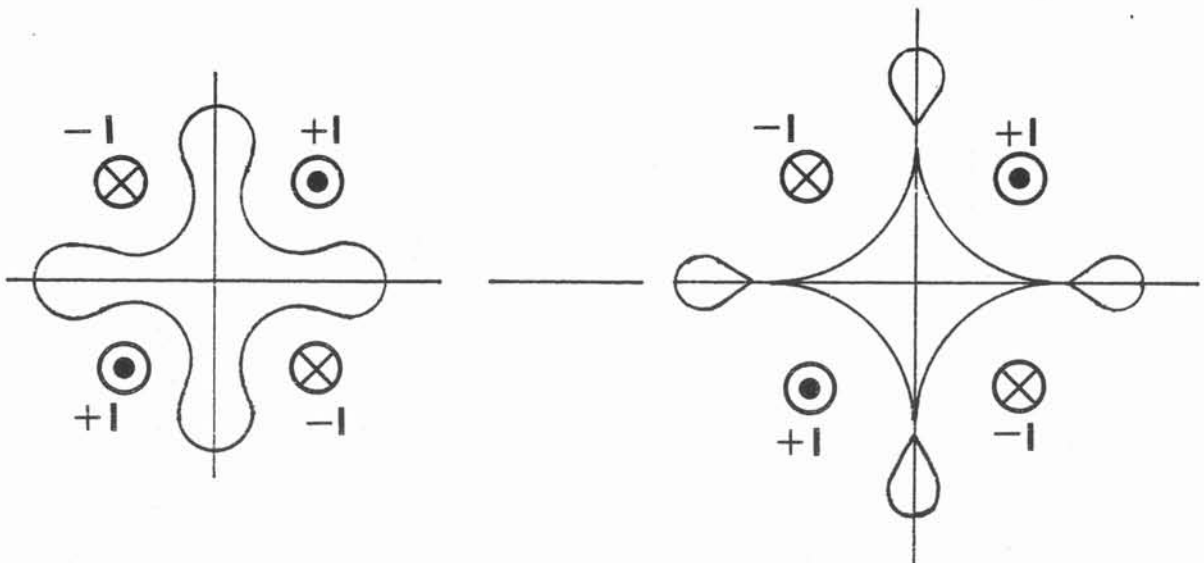
La transformation obtenue est bien conforme





### I.7. - Conclusion :

Le critère d'allongement que nous utilisons ici ne rend pas entièrement compte de la déformation ; en effet, un profilé se rapprochera d'autant plus de l'hypocycloïde que le rapport  $k$  sera faible mais pour un même allongement, on peut obtenir des extrémités plus ou moins émoussées et larges suivant la géométrie. Il aurait été intéressant de tracer une courbe  $f(k) = a$  pour un allongement constant ; mais numériquement, on s'aperçoit rapidement que lorsqu'on approche trop les conducteurs du jet fluide, des creux ont tendance à se former sur les bras du profilé, rendant la transformation non conforme. Il existe en outre une limite de la géométrie et du rapport  $k$  pour laquelle on obtient une formation de gouttes à chaque extrémité du bras : une approche de cette limite a été entreprise par J.A. SHERCLIFF (2)



D'un point de vue numérique, on s'assure à chaque étape de la convergence que la transformation est bien conforme dans le domaine extérieur au métal. Si des solutions  $\frac{dz}{d\xi} = 0$  sont localisées à l'extérieur du cercle unité, la méthode ne peut être utilisée. Ainsi, le cas d'étude sans tension superficielle ne peut être étudié à cause des extrémités de l'hypocycloïde.

## II - ETUDE DE STABILITE GLOBALE

Dans le cas d'inducteurs quadripolaires dont les conducteurs se situent aux sommets d'un carré, les configurations calculées sont stables pour les petits déplacements (on verra qu'il n'en est pas de même si les conducteurs se situent aux sommets de rectangles). Le résultat est différent lorsque les perturbations sont de forte amplitude : on étudie dans ce paragraphe l'équilibre lorsque le jet est soumis à des déplacements importants. Dans ce cas, la stabilité de l'équilibre dépend de l'amplitude et de la direction des perturbations : on parlera alors de stabilité conditionnelle.

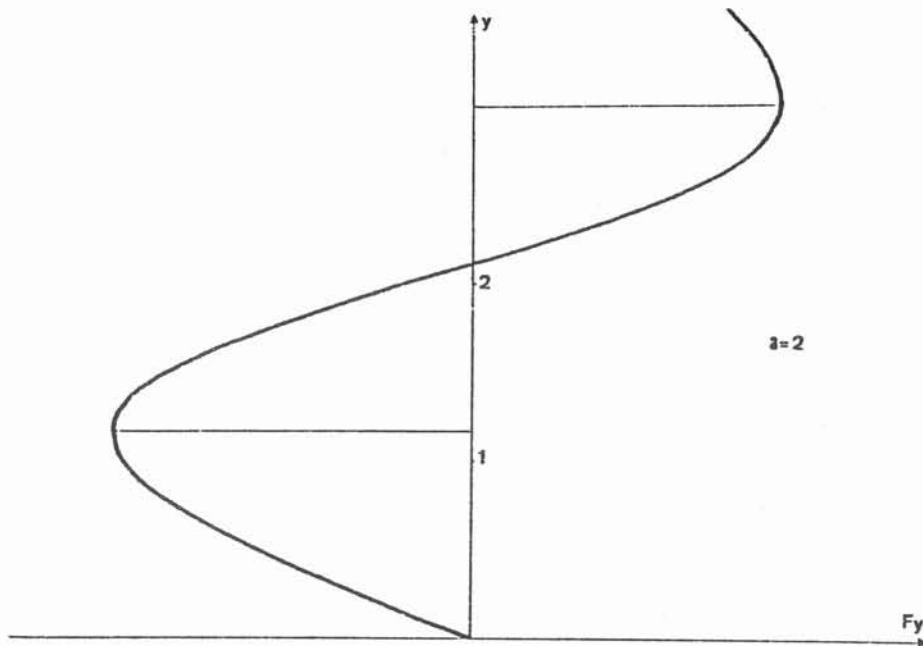
L'étude de cette dernière est faite lorsque les effets de tension superficielle sont prédominants, par deux approches parallèles : méthode des images avec bilan mécanique et calcul variationnel sur l'énergie totale du système (méthode déjà explicitée dans le premier paragraphe).

### II.1. - Position du problème :

On considère un cylindre de section circulaire dont la tension superficielle serait infinie. On calcule la pression magnétique autour du métal ( $R_m \ll 1$  et  $R_w \gg 1$ ) ainsi que la résultante des forces appliquées, soit par la méthode des images, soit par la méthode énergétique. Les dimensions du système considéré sont rapportées au rayon du cylindre. Dans le cas de la méthode des images, il s'agit d'étudier l'interaction de huit conducteurs (4 conducteurs réels + 4 conducteurs images par rapport à la surface du cylindre). Le courant éventuel  $I_c$  au centre du cylindre est nul puisque la somme des courants internes au cylindre est nulle. On s'intéresse alors à la résultante des forces lorsque le cylindre métallique est déplacé dans le domaine  $\Omega$ .

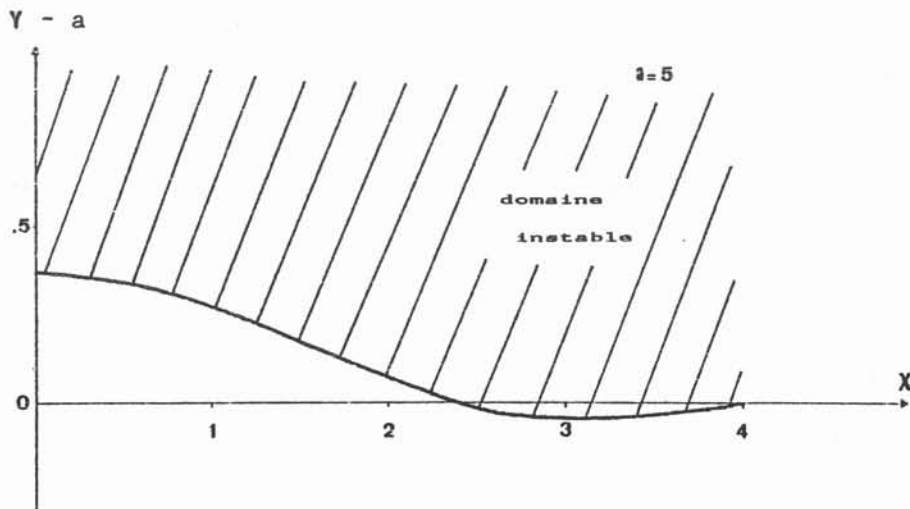
### II.2. - Cas du carré : $a = b$

Le cylindre est translaté le long de l'axe des  $y$  ; l'intensité de la force de rappel ou de répulsion est fonction de l'amplitude du déplacement vertical de la section du cylindre.

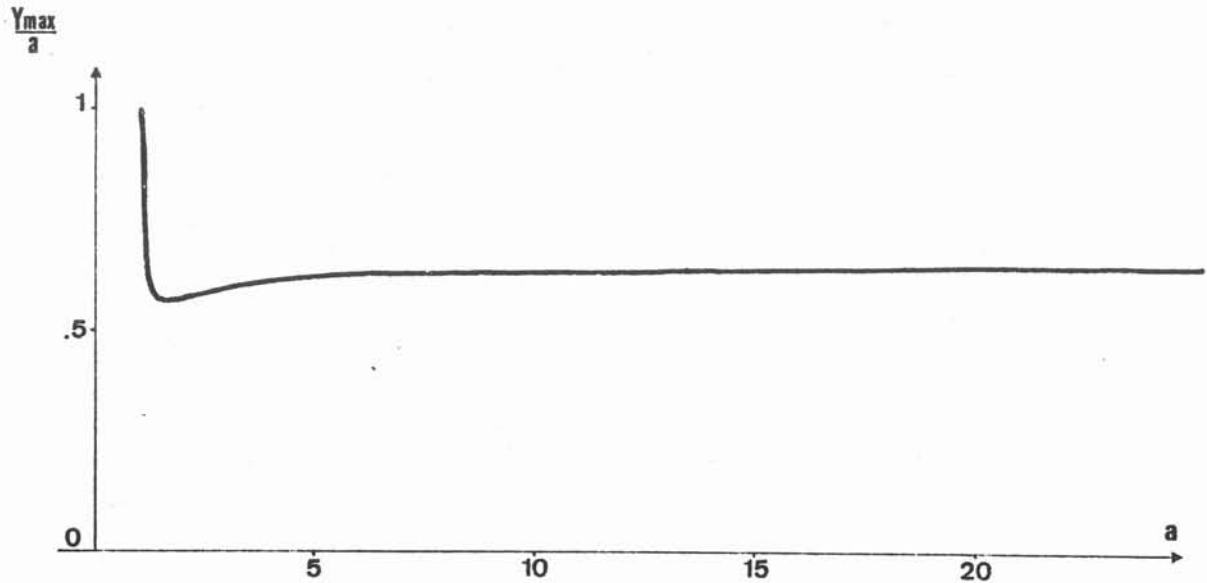


Il existe deux possibilités d'équilibres -stable et métastable- dont l'un s'établit lorsque l'axe du cylindre se trouve à l'extérieur du carré délimité par les axes des conducteurs. Ce résultat assez remarquable signifie qu'un cylindre dont l'axe est en dehors de la section délimitée par les quatre conducteurs peut être ramené en position d'équilibre stable à l'intérieur, suivant son éloignement par rapport au centre.

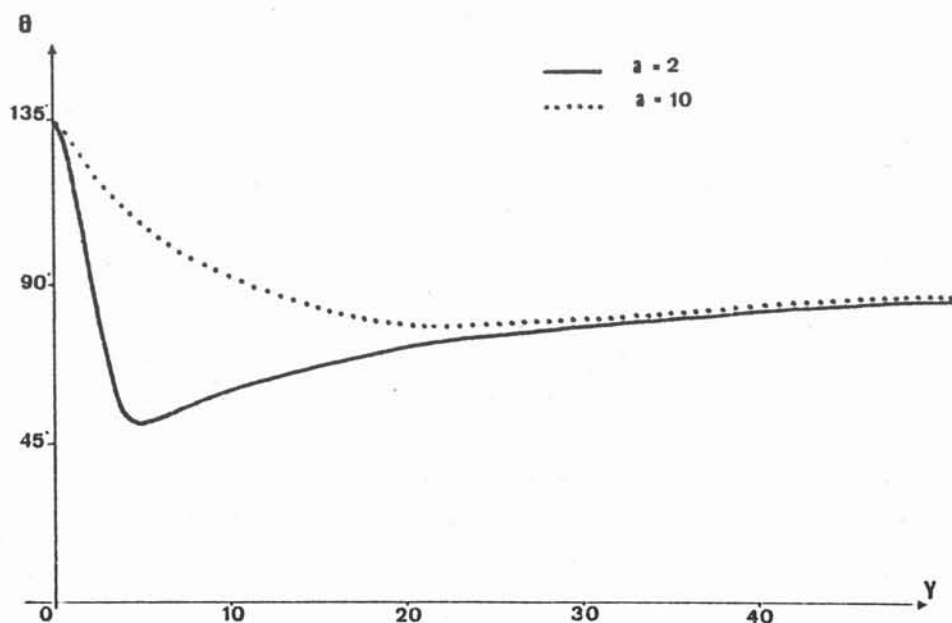
Cette position d'équilibre métastable peut être étudiée par rapport à un déplacement suivant les axes  $Ox$  ou  $Oy$ , ce qui donne une surface d'équilibre par rapport à la géométrie de l'inducteur.



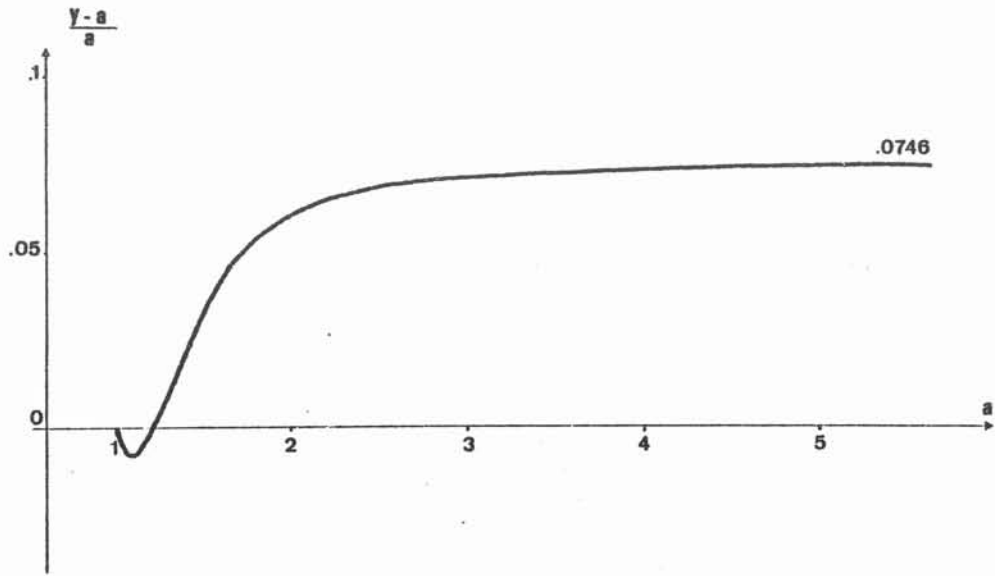
L'intensité de la force de rappel passe par un maximum (ainsi que la force de répulsion). Le déplacement de l'axe du cylindre correspondant à ce maximum dépend de l'écartement des conducteurs par rapport au rayon de la section circulaire. Ce qui se traduit par la courbe  $y_{\max}/a = f(a)$ .



On peut noter l'évolution de l'angle correspondant à la pression maximale autour du cylindre en fonction de la géométrie de l'inducteur.



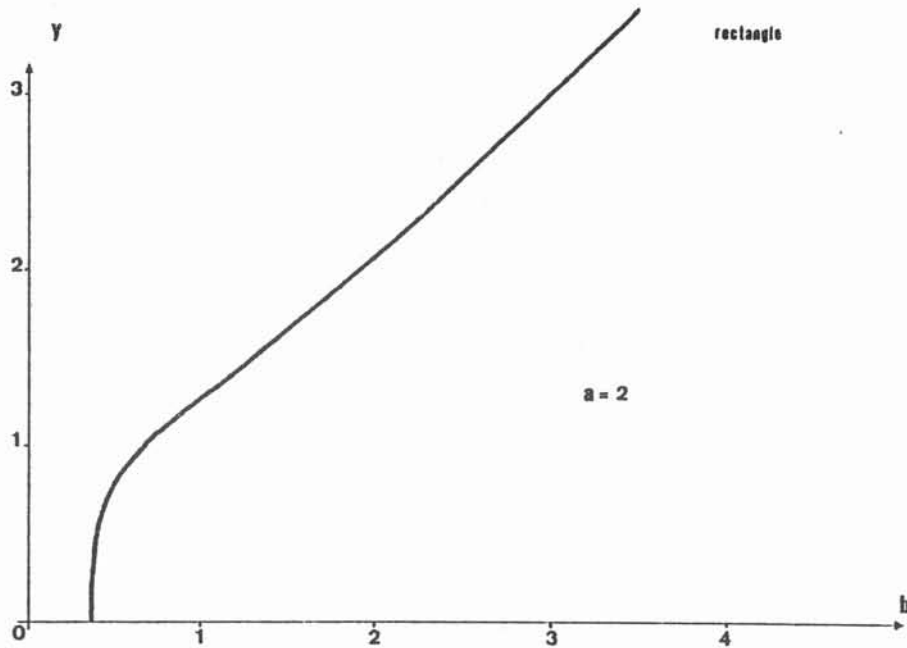
Il est intéressant de noter la position d'équilibre métastable en fonction de la géométrie de l'inducteur. On remarque le fait qu'en dessous d'une certaine valeur de "a", la position d'équilibre métastable se trouve inscrite dans la section formée par les quatre conducteurs.



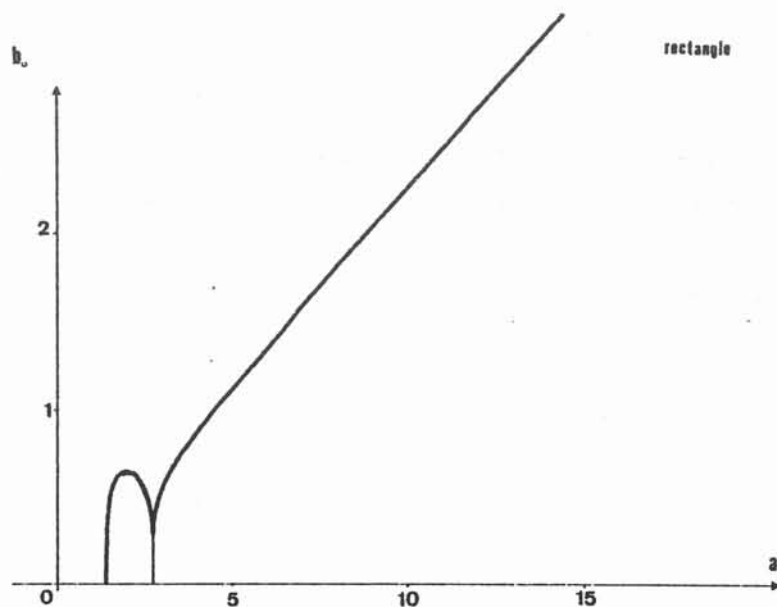
On remarque sur l'ensemble de ces courbes que tous les comportements singuliers apparaissent lorsque les inducteurs sont situés au voisinage de la surface du cylindre ; tout éloignement se traduit par un comportement rapidement asymptotique.

### II.3. - Cas du rectangle $a \neq b$ :

On étudie dans ce paragraphe les variations de la position des points d'équilibre métastable lorsque la géométrie des axes des conducteurs est rectangulaire. Pour une longueur "a" fixée, on calcule les déplacements correspondant à un équilibre instable en fonction de la largeur b du rectangle. On obtient alors le résultat suivant :



Pour une valeur de  $a$  donnée, l'équilibre stable n'existe plus en dessous d'une certaine valeur de  $b$ . C'est-à-dire que pour certaines géométries rectangulaires, l'équilibre devient instable au point central de l'inducteur et le formage n'est plus possible. En outre, la valeur de  $b$ , pour laquelle l'équilibre stable n'existe plus, varie en fonction de  $a$  de façon singulière. En effet, la courbe de  $b$  critique en fonction de  $a$  est de la forme :



#### II.4. - Conclusion :

L'étude de la stabilité pour des perturbations d'amplitudes finies donne des résultats particuliers dans le cas de forte tension superficielle ; on montre en effet que le jet peut être ramené au centre de l'inducteur quadripolaire même si -initialement- l'axe du jet se trouve à l'extérieur de la section délimitée par les conducteurs. D'autre part, si on rapproche suffisamment deux conducteurs des deux autres (configuration rectangle), le système n'est plus stable et le formage est sans doute impossible.

### III - MOUVEMENT DU FLUIDE

Ce paragraphe analyse les phénomènes de brassage induits par les forces électromagnétiques dans des domaines fluides limités par une surface libre. Dans notre cas où la fréquence du champ magnétique est très élevée, ces phénomènes sont secondaires par rapport à l'effet de formage mais sont non négligeables en régime permanent. Cette étude concerne le cas particulier du champ magnétique de géométrie quadripolaire dans une configuration bidimensionnelle en régime permanent. Elle serait très facilement transposable au cas d'une lame fluide soumise à un champ magnétique uniforme et permettra surtout l'étude du mouvement interne du fluide induit par les forces électromagnétique dans un cas pratique et concret qui est celui de la lévitation électromagnétique des métaux liquides.

Les équations à résoudre sont l'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes avec le terme  $\vec{j} \wedge \vec{B}$  comme force par unité de volume. Pour éviter les difficultés de résolution dues au terme de pression, on préfère traduire ces équations en terme de vorticité  $\omega$  et de fonction de courant  $\psi$ . En géométrie bidimensionnelle le système initial se réduit à deux équations aux dérivées partielles non linéaires en  $\omega$  et  $\psi$  (9), (10).

Du fait de l'apparition de formes relativement complexes à cause du phénomène de surface libre, il nous a paru intéressant d'utiliser une méthode aux éléments finis. Le système expert de résolution choisi (appelé "Flux-Expert") a été mis au point par Philippe MASSE (11) ; c'est une méthodologie générale de la modélisation numérique des équations aux dérivées partielles à l'aide d'une technique de résolution par éléments finis. On utilise la méthode de Galerkin qui consiste à traiter directement les équations aux dérivées partielles que l'on veut résoudre en les projetant sur une famille de fonctions indépendantes à l'aide d'un produit scalaire adéquat. L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode de Ritz réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas la connaissance d'un principe variationnel associé aux équations aux dérivées partielles à traiter (12) (13).



Tout d'abord, on étudie le cas d'un cylindre liquide de tension superficielle très élevée de façon analytique. Ensuite, une étude numérique est faite à partir de l'équation du tourbillon sans terme de transport. Cette approche conduit à résoudre par deux fois l'équation du type  $\Delta X = A$  avec des conditions aux limites de Dirichlet. Puis le terme de transport couplant les équations en  $\omega$  et  $\psi$  est introduit dans le système dont la non linéarité est fonction du nombre de Reynolds. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux de H.K. MOFFATT qui considère une profondeur de pénétration nulle et prend en compte la partie rotationnelle des forces électromagnétiques par l'introduction d'une contrainte tangentielle appliquée à la surface du domaine métallique. Enfin, on calcule le mouvement induit dans un cas de profilés cruciformes (14) (15) (16) (17).

### III.1. - Résolution analytique :

#### 1. Equation de la vorticité

La vorticité  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$  est régie par l'équation :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} (\vec{j} \wedge \vec{B}) + \nu \Delta \vec{\omega}$$

#### HYPOTHESES :

- On considère le régime stationnaire, c'est-à-dire que le terme  $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$  est nul.
- $Re \ll 1$  ; en effet, le "moteur" du mouvement se trouve dans l'épaisseur de peau électromagnétique où  $Re$  est petit : les forces d'inerties sont donc négligeables devant les forces de vorticité. L'équation du tourbillon devient alors l'équation de Kelvin :

$$\nabla^2 \vec{\omega} = - \frac{1}{\rho \nu t} \text{rot } (\vec{j} \wedge \vec{B})$$

où  $\nu t$  représente une viscosité turbulente.

- Considérant la bidimensionnalité du problème, le potentiel vecteur de la vitesse peut se définir comme  $\vec{A}(0, 0, \psi)$  avec  $\vec{u} = \text{rot } \vec{A}$  où  $\psi$  est la fonction de courant ; on a alors :

$$\vec{A} = \psi \vec{k}$$

$$\vec{u} = \vec{rot} (\vec{\psi} \vec{k})$$

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla}(\text{div } \vec{\psi} \vec{k}) - \Delta(\vec{\psi} \vec{k})$$

$$\nabla^2 \vec{\omega} = \text{grad} (\text{div } \vec{\omega}) - \vec{rot} (\vec{rot} \vec{\omega})$$

$$\nabla^2 \vec{\omega} = -\nabla^4 (\vec{\psi} \vec{k})$$

La fonction de courant  $\psi(n,s)$  satisfait à l'équation biharmonique :

$$\nabla^4 \psi = \frac{1}{\rho v_t} \left[ \vec{rot} \vec{j} \wedge \vec{B} \right]$$

Soit  $B_0(s)$  à la surface du fluide connue, on introduit l'épaisseur de peau électromagnétique  $\delta$  du matériau. Puisque  $R_\omega \gg 1$ , on a  $\frac{\partial B}{\partial s} \ll \frac{\partial B}{\partial n}$ .

Sur  $\Gamma$ , le champ magnétique est de la forme  $B_0(s) e^{i\omega t}$

L'équation de diffusion s'écrit :  $\mu \sigma \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial^2 B}{\partial n^2}$

$$\Rightarrow \vec{B}(n,s) = \begin{vmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{avec } B = B_0 e^{n/\delta} e^{i(\omega t + n/\delta)}$$

$$\text{d'où } \vec{j} = \frac{(1+i)}{\mu \delta} B_0 e^{+n/\delta} e^{i(\omega t + n/\delta)}$$

La force de Laplace  $F$  est normale à la surface libre et :

$$F = - \frac{B_0^2}{\mu \sigma \sqrt{2}} e^{-2n/\delta} (\cos (2\omega t + 2n/\delta + \pi/4 + \cos \pi/4))$$

$$\text{d'où la force moyenne } \vec{F} = - \frac{B_0^2}{2\mu \delta} e^{2n/\delta} \vec{n}$$

$$\text{et } \vec{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{B_0}{\mu \delta} \frac{\partial B_0}{\partial s} e^{-2n/\delta} \end{vmatrix}$$

d'où l'équation biharmonique :

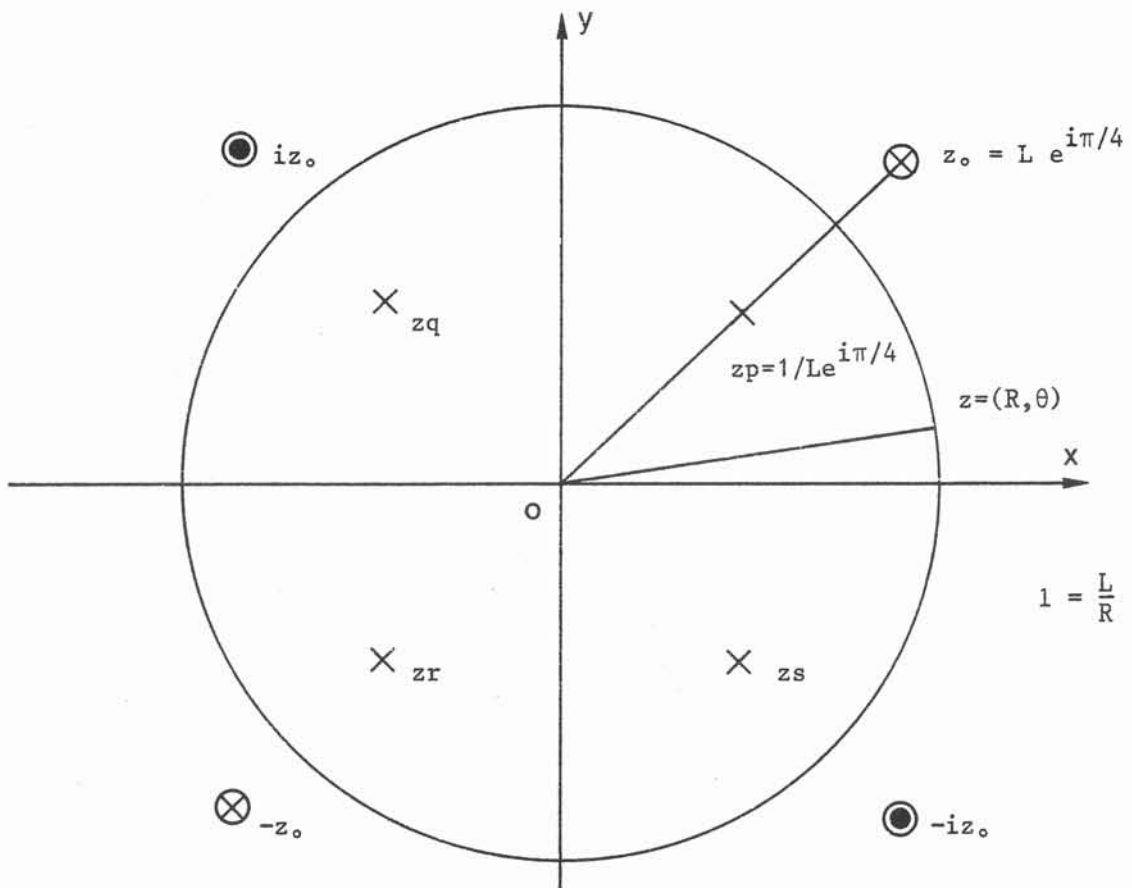
$$\nabla^4 \psi = \frac{Bo}{\rho v_t \mu \delta} \frac{\partial Bo}{\partial s} e^{-2n/\delta}$$

ou

$$\nabla^4 \psi = \frac{2}{\rho v_t \delta} (\vec{n} \wedge \vec{\nabla} P_m) e^{-2n/\delta}$$

où  $P_m$  est la pression magnétique  $\frac{Bo^2(s)}{2\mu}$

## 2. Résolution dans le cas de tension superficielle infinie



Le champ magnétique est calculé par la méthode des images. Le potentiel complexe  $w(z)$  résultant de la distribution des singularités s'écrit :

$$w(z) = i \frac{\mu_o I}{2\pi} \log \frac{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_q)(z-z_s)}{(z-z_2)(z-z_4)(z-z_p)(z-z_r)}$$

et donne le champ magnétique complexe

$$B_x - iB_y = \frac{dw}{dz} = - \frac{2\mu_o I}{\pi R} \frac{l^2(l^4-1) e^{i\theta}}{1+l^8 + 2l^4 \cos 4\theta} (1-e^{-i4\theta})$$

Le champ magnétique à la surface du cylindre s'en déduit

$$B_o(\theta) = 2\sqrt{2} \frac{\mu_o I}{\pi R} \frac{l^2(l^4-1)}{1+l^8 + 2l^4 \cos 4\theta} \sqrt{1-\cos 4\theta}$$

ainsi que la forme de l'équation régissant  $\psi$  :

$$\nabla^4 \psi = \frac{16\mu I^2 l^4 (l^4-1)^2}{\pi^2 \rho \nu t \delta R} e^{-2n/\delta} \sin 4\theta \frac{1+l^8 + 2l^4 (2-\cos 4\theta)}{(1+l^8 + 2l^4 \cos 4\theta)^3}$$

qui admet pour solution

$$\psi = A\delta^3 e^{-2(R-r)/\delta} f'(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{n+2}) \sin 4n\theta$$

avec  $A = \frac{\mu I^2 l^4 (l^4-1)^2}{4\pi^2 \rho \nu t R}$

et  $f'(\theta) = 4 \sin 4\theta \frac{1+l^8 + 2l^4 (2-\cos 4\theta)}{(1+l^8 + 2l^4 \cos 4\theta)^3}$

#### \* Conditions aux limites

- Imperméabilité de la surface libre :  $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$  ; la surface libre est une ligne de courant sur laquelle  $\psi$  est une constante prise égale à zéro.

- Egalité des contraintes tangentielles de part et d'autre de la surface libre

$$\mu_1 (e_{ij})_1 = \mu_2 (e_{ij})_2$$

où les indices 1 et 2 désignent respectivement les milieux conducteur et isolant,  $\mu$  la viscosité dynamique et

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

l'atmosphère ambiante étant supposée au repos, la condition sur les contraintes tangentielles se réduit à

$$e_{nt} = e_{tn} = 0$$

Dans un système de coordonnées orthogonales, on montre que

$$e_{nt} = \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{u}{h_1} \right)$$

avec dans le cas particulier considéré, en coordonnées cylindro-polaires :

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right| & u_1 &\longrightarrow \vec{n} \\ h_2 &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \right| & u_2 &\longrightarrow \vec{t} \\ h_3 &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right| & u_3 &\longrightarrow \vec{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Pour traduire les conditions aux limites, la fonction  $f(\theta)$  qui intervient dans l'expression de  $\psi$  est décomposée en série de Fourier sous la forme :

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos 4n\theta$$

Ainsi :

$$\left\{ \begin{aligned} (\psi)_{r=R} &= -4n A \delta^3 f_n + A_n R^n + B_n R^{n+2} = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R} &= 16 \delta R^2 n A f_n + n(n-2) A_n R^n + n(n+2) B_n R^{n+2} = 0 \end{aligned} \right.$$

Compte tenu que  $4n\delta^3 f_n \ll 16n \delta R^2 f_n$  ce système admet pour solution

$$A_n = -B_n R^2 = -\frac{4 A \delta R^2 f_n}{R^n}$$

Par suite :

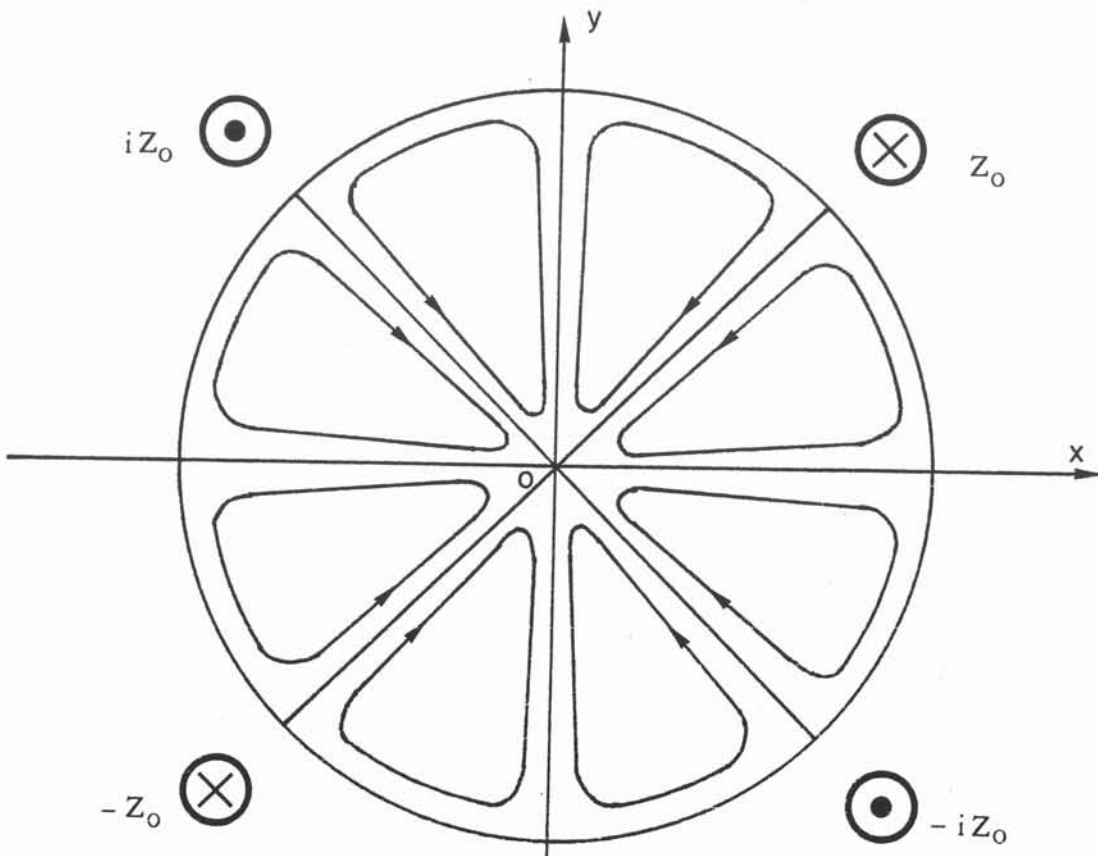
$$\psi = -4 A \delta (R^2 - r^2) \sum_1^{\infty} f_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin 4n\theta$$

$$\text{où } f_n = \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 4\theta}{(1 + 1^8 + 21^4 \cos 4\theta)^2} \cos 4n\theta \, d\theta$$

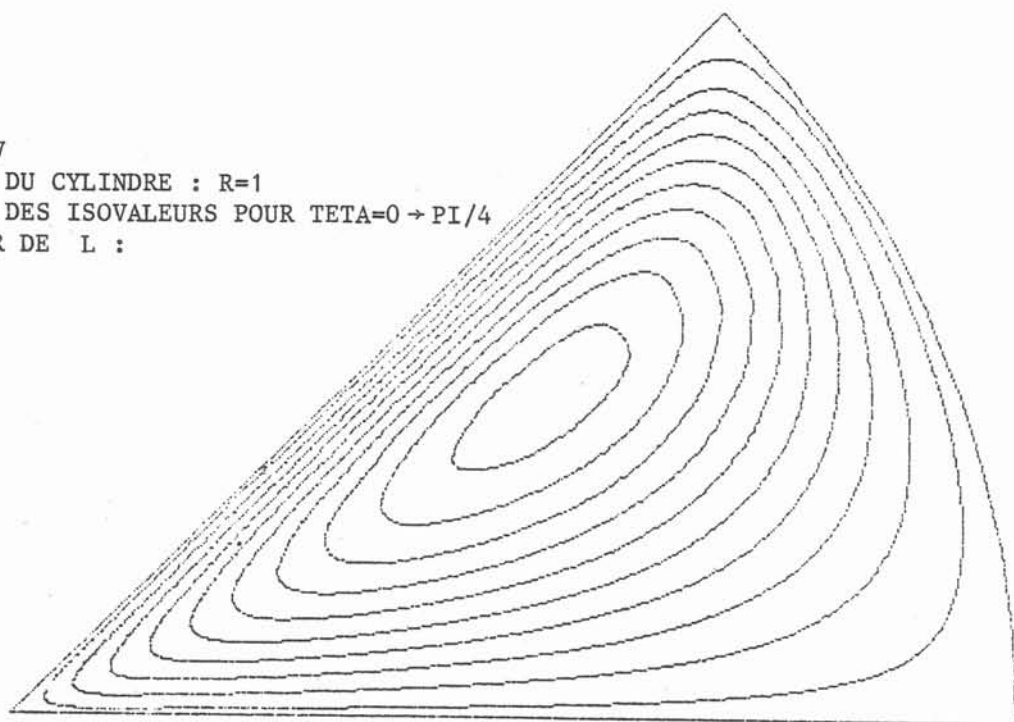
soit

$$\psi = -\frac{32}{\pi} A (R^2 - r^2) \sum_1^{\infty} \left( \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 4\theta}{(1 + 1^8 + 21^4 \cos 4\theta)^2} \cos 4n\theta \, d\theta \right) \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin 4n\theta$$

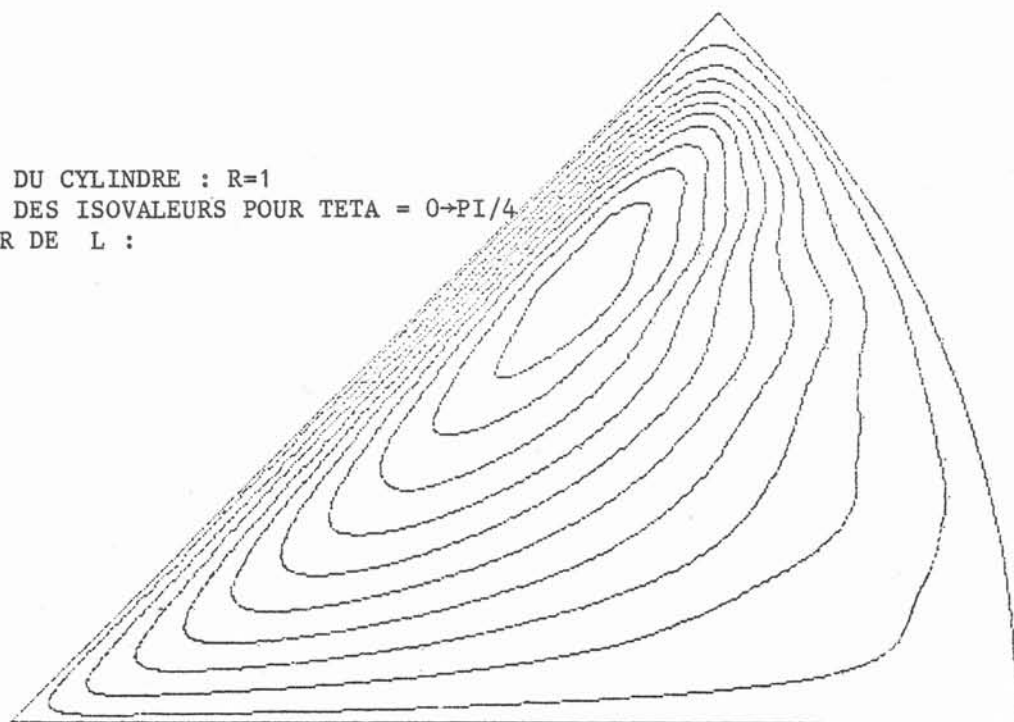
La configuration d'écoulement correspondante se compose de huit vortex symétriques deux à deux par rotation de  $\pi/2$ . Lorsque les conducteurs sont approchés de la surface du cylindre (diminution de  $L$ ), la production de vorticité se concentre et l'oeil des vortex se rapproche de chacun des conducteurs.



10ISOV  
 RAYON DU CYLINDRE :  $R=1$   
 TRACE DES ISOVALEURS POUR  $TETA=0 \rightarrow \pi/4$   
 VALEUR DE  $L$  :  
 1.30



10ISOV  
 RAYON DU CYLINDRE :  $R=1$   
 TRACE DES ISOVALEURS POUR  $TETA = 0 \rightarrow \pi/4$   
 VALEUR DE  $L$  :  
 1.10



### III.2. - Résolution du problème

Les termes de transport -non linéaires- de l'équation de Navier Stokes sont pris en compte.

#### 1. Flux Expert

La souplesse d'adaptation de la méthode des éléments finis à modéliser des phénomènes complexes dans des géométries élaborées, a conduit à la généralisation de son utilisation dans presque tous les problèmes aux dérivées partielles. Plutôt que d'utiliser la méthode de RITZ RAYLEIGH, qui n'est applicable que si on connaît une fonctionnelle équivalente au problème différentiel que l'on veut résoudre (minimisation d'une énergie), on peut traiter directement les équations par une méthode projective : la méthode de Galerkin (minimisation d'une erreur relative au système d'équations appelée résidu). Cette dernière consiste à approcher les fonctions inconnues par des familles de fonction de la forme :

$$I = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x,y) I_j$$

que l'on projette sur une autre famille de fonctions  $\beta_i$ , indépendantes, à l'aide d'un produit scalaire. On est souvent conduit à prendre comme fonctions de projection les fonctions  $\alpha_i$  elles-mêmes.

Les termes de transport de l'équation de Navier-Stokes conduisent à un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire ; pour la résolution de ce type de systèmes, il semble que ce soit la méthode de Newton-Raphson qui conduise le plus efficacement aux résultats. Le principe de cette méthode -comme on le verra dans le paragraphe suivant- consiste à développer en série la valeur du résidu au voisinage de la solution.

Pour transformer les équations fournies par la physique en un ensemble de systèmes algébriques linéaires traitables par ordinateur, après avoir projeté le résidu des équations à résoudre sur une famille de fonctions, il reste à discrétiser les inconnues à l'aide des polynômes d'interpolation et à linéariser. Pour un système non linéaire, la méthode de Newton-Raphson nous impose un point de départ numérique aussi proche que possible de la physique ; ces "conditions initiales" sont dans notre cas, le résultat des équations découplées, c'est-



à-dire où le terme de transport n'intervient pas. Il faut enfin tenir compte des conditions aux limites.

"Flux Expert" est un système informatique qui permet de décrire conversationnellement ces équations discrétisées à résoudre. Toute la technique informatique est prise en charge par un système -dit générateur- qui découpe chaque système objet en éléments finis, affecte les propriétés et les conditions aux limites, fait résoudre le problème décrit et présente les résultats. La description du système d'équations que nous utilisons à l'aide de "Flux Expert" demande un maximum de quelques heures de travail sur un terminal alphanumérique, le coût de cette phase étant extrêmement faible. Par contre les problèmes numériques que pose la résolution des équations de Navier Stokes sont très délicats du fait de la non linéarité et de la dissymétrie des matrices.

## 2. Les équations générales - Méthode de Galerkin

$$\begin{cases} (\text{rot } (\psi \vec{k}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = \frac{1}{\rho} \text{rot } \vec{F}_{em} + \nu \Delta \vec{\omega} \\ \Delta(\psi \vec{k}) = - \vec{\omega} \end{cases}$$

De par la méthode de Galerkin, les équations de Navier-Stokes sont projetées sur une famille de fonctions  $\alpha_i$  :

$$\begin{cases} \iint \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \iint \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \iint \alpha_i \frac{1}{\rho} \text{rot } F_{em} + \nu \iint \alpha_i \Delta \omega \\ \iint \alpha_i \Delta \psi = - \iint \alpha_i \omega \end{cases}$$

L'intégration par parties des termes de transport et de viscosité nous donne :

$$\rightarrow \nu \iint \alpha_i \Delta \omega = - \nu \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \nu \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \nu \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma$$

$$\rightarrow \iint \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} = - \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial y} \omega \alpha_i \cdot n_x$$

$$\rightarrow \iint \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = - \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \omega \alpha_i \cdot n_y$$

$$\rightarrow \iint \alpha_i \Delta \psi = - \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma$$

où  $n_x$  et  $n_y$  sont les cosinus directeurs de la normale à  $\Gamma$ .

On a donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} - \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \omega + \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \omega + \nu \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \nu \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ = \iint \alpha_i \frac{1}{\rho} \text{rot } F_{em} + \nu \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial y} \omega \alpha_i n_x + \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x} \omega \alpha_i n_y \\ - \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \iint \alpha_i \omega = - \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \end{cases}$$

que l'on écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} & \nu \iint \text{grad } \alpha_i \text{ grad } \omega - \iint \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \omega + \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \omega \right. \\ & \quad = \iint \alpha_i \frac{1}{\rho} \text{rot Fem} + \nu \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha_i \omega \text{rot } \psi \cdot \vec{n} \\ & \quad \left. \iint \text{grad } \alpha_i \text{ grad } \psi - \iint \alpha_i \omega = \int_{\Gamma} \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \right\} \end{aligned} \right.$$

Le problème peut alors se mettre sous la forme matricielle :

$$[M] [I] = [KS] \quad \text{avec } I = \begin{bmatrix} \omega \\ \psi \end{bmatrix}$$

$$\text{c'est-à-dire } F(I) = [M] [I] - KS = 0$$

Le principe de la méthode de Newton Raphson consiste à développer en série au voisinage de la solution  $I_0$  la valeur du résidu. Lorsque  $I$  représente l'ensemble des valeurs modèles de l'inconnue, on écrit :

$$F(I) = F(I_0) + \left[ \frac{\partial F(I_0)}{\partial I} \right] \Delta I_0 \sim 0$$

L'algorithme est donc le suivant :

$$\left[ \frac{\partial F(I^{(k)})}{\partial I^{(k)}} \right] \Delta I^{(k)} = - F(I^{(k)})$$

où  $\frac{\partial F}{\partial I}$  représente la matrice jacobienne du système  $F(I) = 0$ .

Dans le cas qui nous intéresse, on doit avoir recours à des méthodes incrémentielles qui construisent artificiellement une suite de problèmes voisins partant d'un état connu uniforme pour parvenir aux conditions particulières de l'étude. Pour cela, on part du problème découplé en introduisant dans le terme de transport une propriété  $P (= 0 \text{ ou } = 1)$  qui nous conduit à une première solution, cette dernière servant de point de départ pour l'approche suivante avec le terme de transport.

Pour l'écriture de la matrice M et de la jacobienne J, les termes de couplage sont disposés en dehors de la diagonale. La linéarisation du système d'équations nous conduit à considérer les différents termes:

$$\begin{bmatrix} M_{\omega\omega} & M_{\omega\psi} \\ M_{\psi\omega} & M_{\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_j \\ \psi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KS_{\omega} \\ KS_{\psi} \end{bmatrix}$$

$$M_{\omega\omega} = \nu \iint \text{grad } \alpha_i \text{ grad } \alpha_j - \nu \int \alpha_i \vec{\nabla} \alpha_j \cdot \vec{n}$$

$$M_{\omega\psi} = - \iint \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \omega + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \right) + \int_{\Gamma} \alpha_i \omega \vec{\text{rot}} \alpha_j \cdot \vec{n}$$

$$M_{\psi\omega} = - \iint \alpha_i \alpha_j$$

$$M_{\psi\psi} = \iint \text{grad } \alpha_i \text{ grad } \alpha_j - \int_{\Gamma} \alpha_i \vec{\nabla} \alpha_j \cdot \vec{n}$$

et

$$KS_{\omega} = \iint \alpha_i \frac{1}{\rho} \vec{\text{rot}} \text{ Fem}$$

$$KS_{\psi} = 0$$

La Jacobienne s'écrit :  $J = M + DM$ . On ne s'intéresse alors qu'à l'écriture de DM :

$$DM_{\omega\omega} = - \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \alpha_j + \iint \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \alpha_j + \int_{\Gamma} \alpha_i \alpha_j \vec{\text{rot}} \psi \cdot \vec{n}$$

$$DM_{\omega\psi} = DM_{\psi\omega} = DM_{\psi\psi} = 0$$

### 3 - Equations découplées :

Si les termes de transport sont négligés, la méthode de Galerkin conduit au système d'équations :

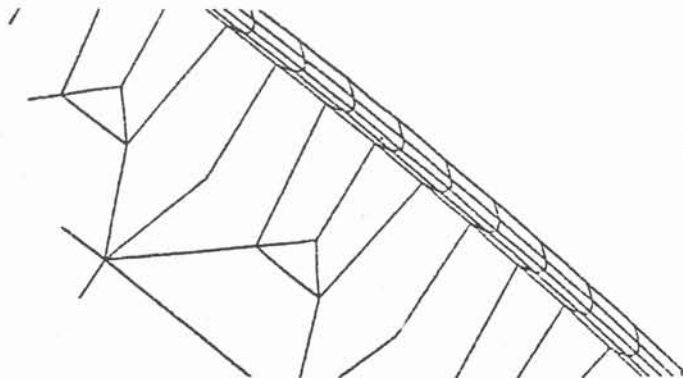
$$\sum_j \left\{ \iint v \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j \right\} \omega_j = \iint \alpha_i \frac{1}{\rho} \text{rot } \vec{F}_{em} + \int v \alpha_i \frac{\partial \omega}{\partial n}$$

$$\sum_j \left\{ \iint \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j \right\} \psi_j = - \iint \alpha_i \omega + \int \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

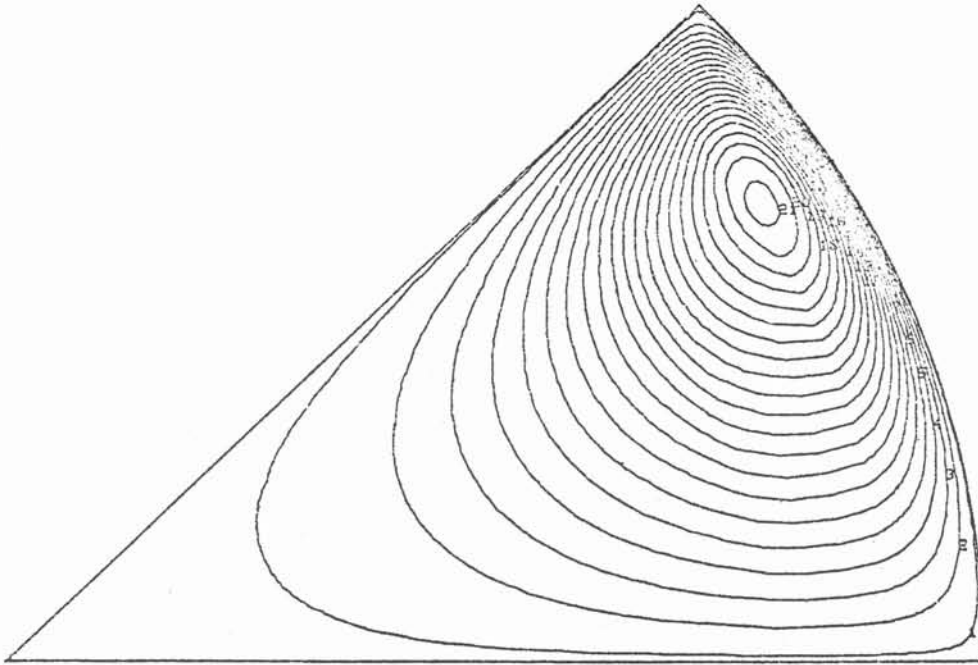
Les conditions aux limites sont l'imperméabilité de la surface qui se traduit par le fait que la surface libre est une ligne de courant ( $\psi = \text{cste} = 0$ ) et l'égalité des contraintes tangentielles à la surface libre qui -au premier ordre ou si le rayon de courbure de la surface est grand devant 1- se traduit par  $\omega = 0$ .

La résolution numérique se fait en deux étapes identiques : résolution de l'équation  $\nabla^2 X = \text{VALEUR}$  avec les conditions aux limites correspondantes. Les valeurs  $\omega_i$ , solutions de la première équation, sont utilisées comme source pour la résolution de la deuxième équation. Pour ce calcul, on utilise une interpolation polynomiale isoparamétrique du second ordre.

L'épaisseur de peau électromagnétique doit être soigneusement prise en compte pour le maillage des éléments finis près de la frontière.



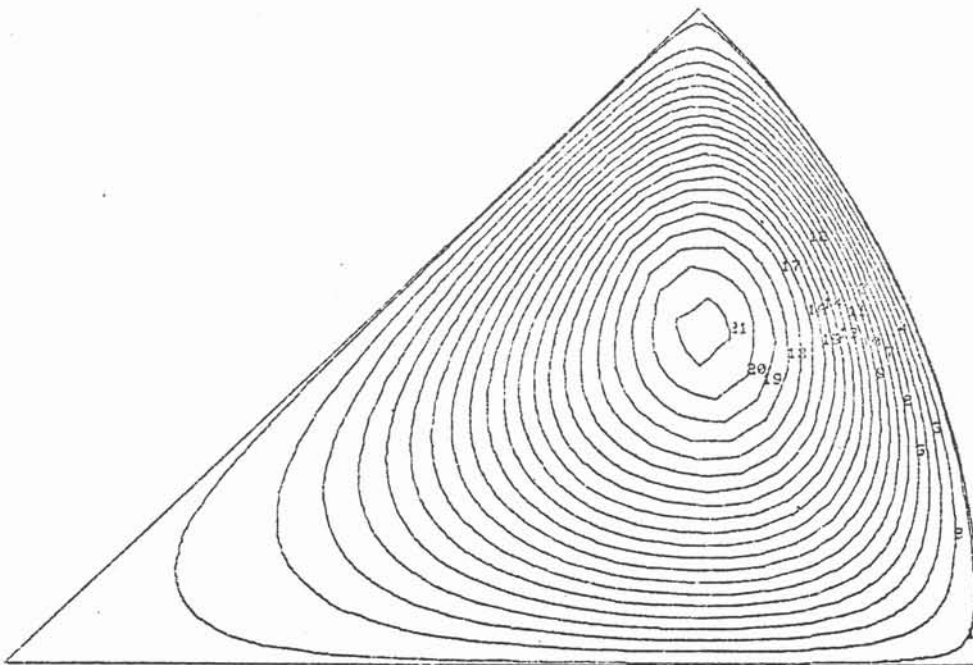
Les résultats sont calculés dans le cas de forte tension superficielle. Comme pour l'étude analytique ils font apparaître huit vortex dont la forme varie suivant la configuration géométrique et la fréquence du champ électromagnétique appliqué. Lorsque cette dernière augmente, les centres des vortex caractérisant les lignes iso- $\omega$  ont tendance à se rapprocher de la position angulaire limite magnétostatique correspondant au maximum du rotationnel des forces.

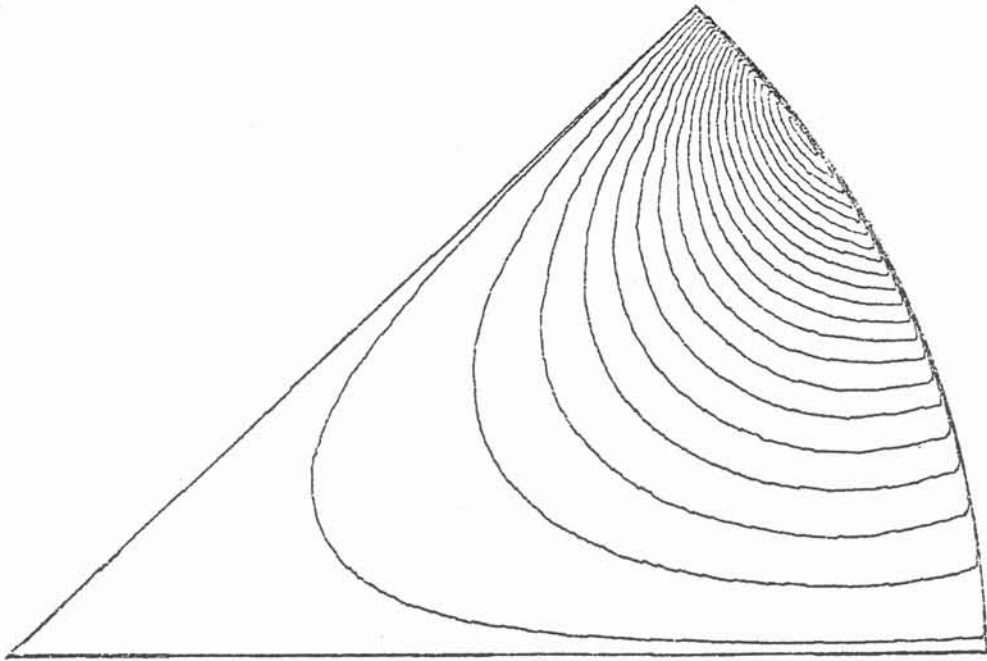


Isovaleurs de la vorticité  $\omega$

$$\delta/R = 0.1$$

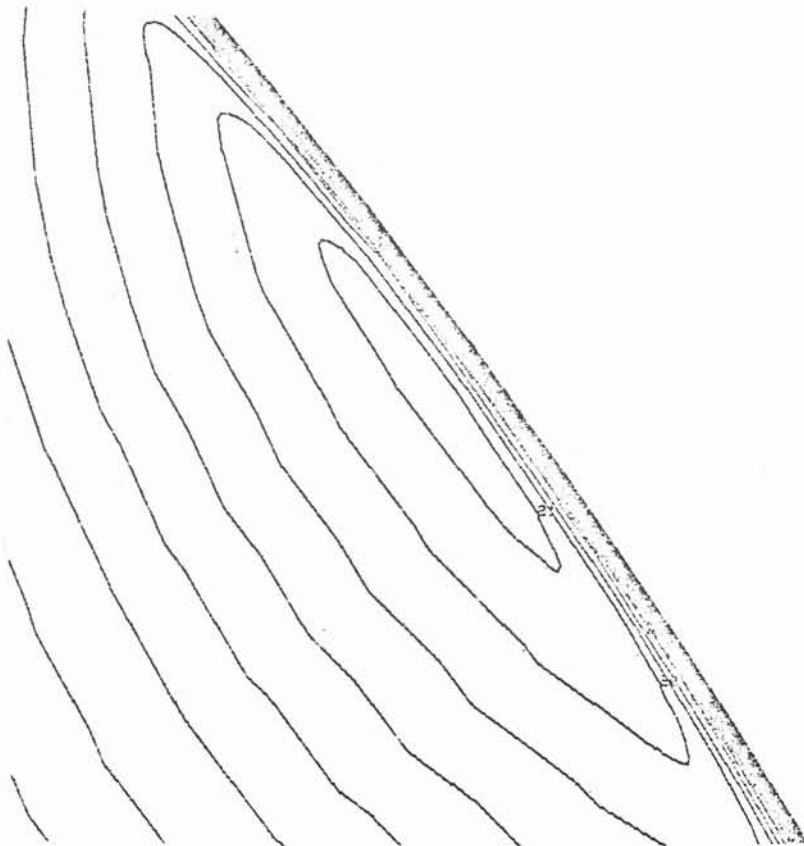
Isovaleurs de la fonction de courant  $\psi$

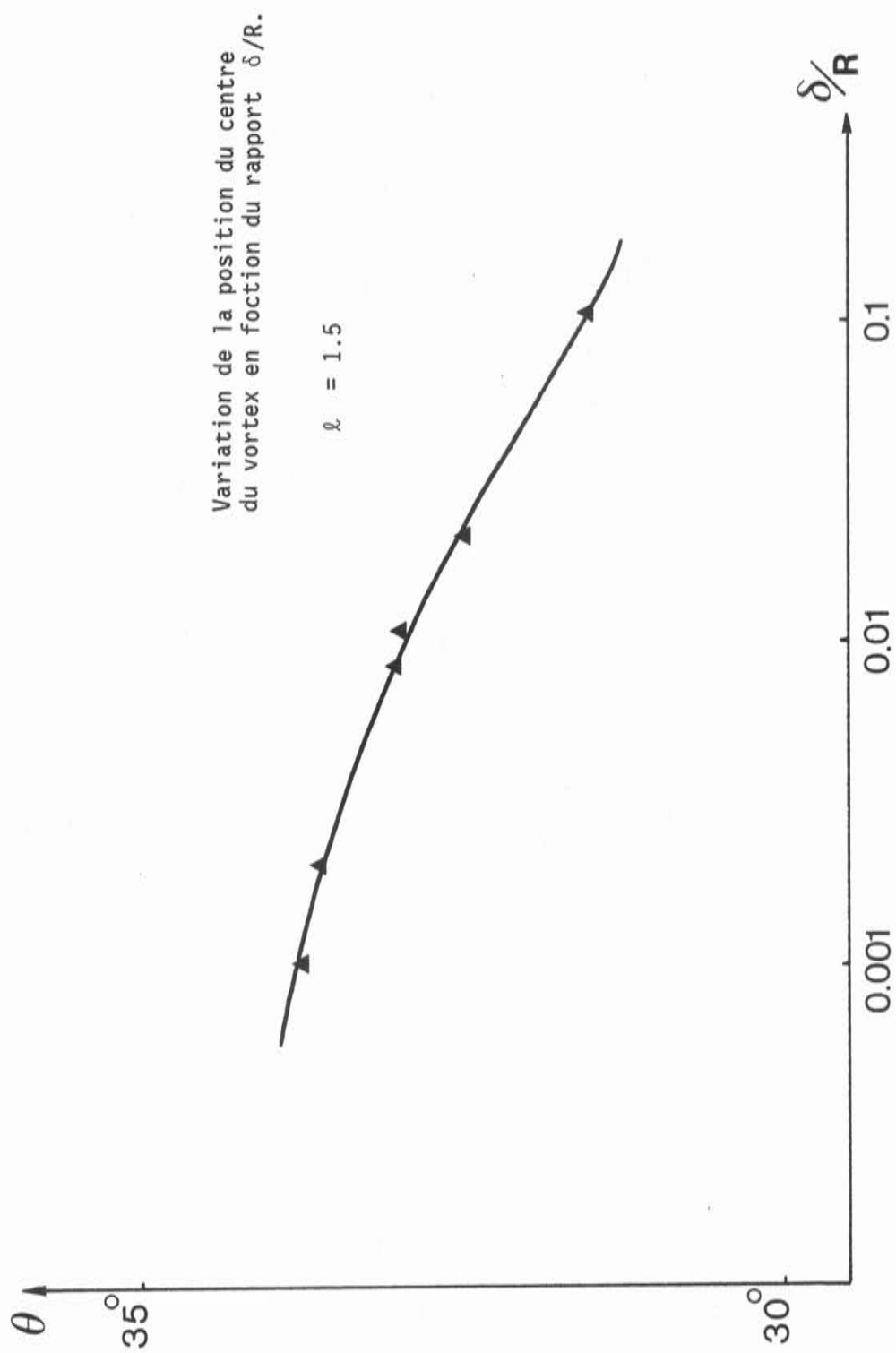




Isovaleurs de la vorticité

$$\delta/R = 0.003$$







4 - Equations couplées :

Dans le cas de la formulation couplée, le système d'équations est non linéaire. Pour le résoudre, on utilise la méthode de Newton-Raphson ; on doit introduire le nouveau terme intégrant dans la matrice jacobienne :

$$- \iint \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \alpha_j + \iint \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \alpha_j - \int_{\Gamma} \alpha_i \alpha_j \vec{r} \otimes \vec{\psi} \cdot \vec{n}$$

Une valeur initiale " adéquate " est nécessaire dans ce cas pour obtenir un schéma non divergent. Ce fichier de départ est obtenu à partir de la solution du problème découplé. A chaque itération - tant que le nombre de Reynolds n'est pas trop élevé - la méthode de Cholesky incomplète du gradient bi-conjugué est adaptée à la résolution du système non symétrique.

Le schéma de convergence est d'autant plus délicat que le nombre de Reynolds numérique dans la couche électromagnétique est élevé. Rapidement, pour des Re numériques importants, la méthode de Newton Raphson doit être utilisée avec précaution et dans notre cas où plusieurs solutions peuvent exister, on a recours à un régime transitoire artificiel pour ne pas risquer de converger vers d'autres solutions.

Toujours pour une forte tension superficielle, les résultats font apparaître huit vortex tant que le nombre de Reynolds est suffisamment faible. Avec l'augmentation de ce dernier, d'autres vortex se développent aux abords des angles et rendent la convergence trop rapidement très difficile. On montre l'évolution de l'écart relatif des valeurs maximales de la vorticité et de la fonction de courant entre les résolutions des équations découplées et couplées en fonction du nombre de Reynolds relatif à l'écoulement global.

Rw	Re	$\frac{\omega_{dec} - \omega_{coupl}}{\omega_{coupl}}$	$\frac{\psi_{dec} - \psi_{coupl}}{\psi_{coupl}}$
315	27	$\sim 0$	$\sim 0$
	41	0.13	0.27
	54	0.39	0.74
	68	0.63	1.26
	270	div	div
	2700	div	div

### 5 - Contrainte tangentielle à la surface libre

Si la fréquence du champ électromagnétique est suffisamment élevée, les courants induits sont confinés dans une faible épaisseur de peau dans laquelle se crée la vorticité. Par intégration de l'équation du mouvement à l'intérieur de cette couche, H.K. Moffatt montre que l'effet des forces de Laplace consiste à induire une contrainte tangentielle effective à l'intérieur de la peau, dans le cas d'une surface libre  $\Gamma$ , telle que :

$$\tau_{\Gamma} = \frac{1}{4} \rho \delta Q(X)$$

où  $Q(X) = (\mu\rho)^{-1} \nabla |B_s|^2$  pour une excitation monophasique.

Si -dans l'équation du mouvement- on remplace le terme moteur ( $\vec{\text{rot}} \vec{F}_{em}$ ) par une condition aux limites à la frontière, on a au premier ordre sur la surface libre :

$$\omega = \frac{-\tau}{\rho v} = \frac{-\delta}{8\rho v \mu_0} \nabla |B_s|^2$$

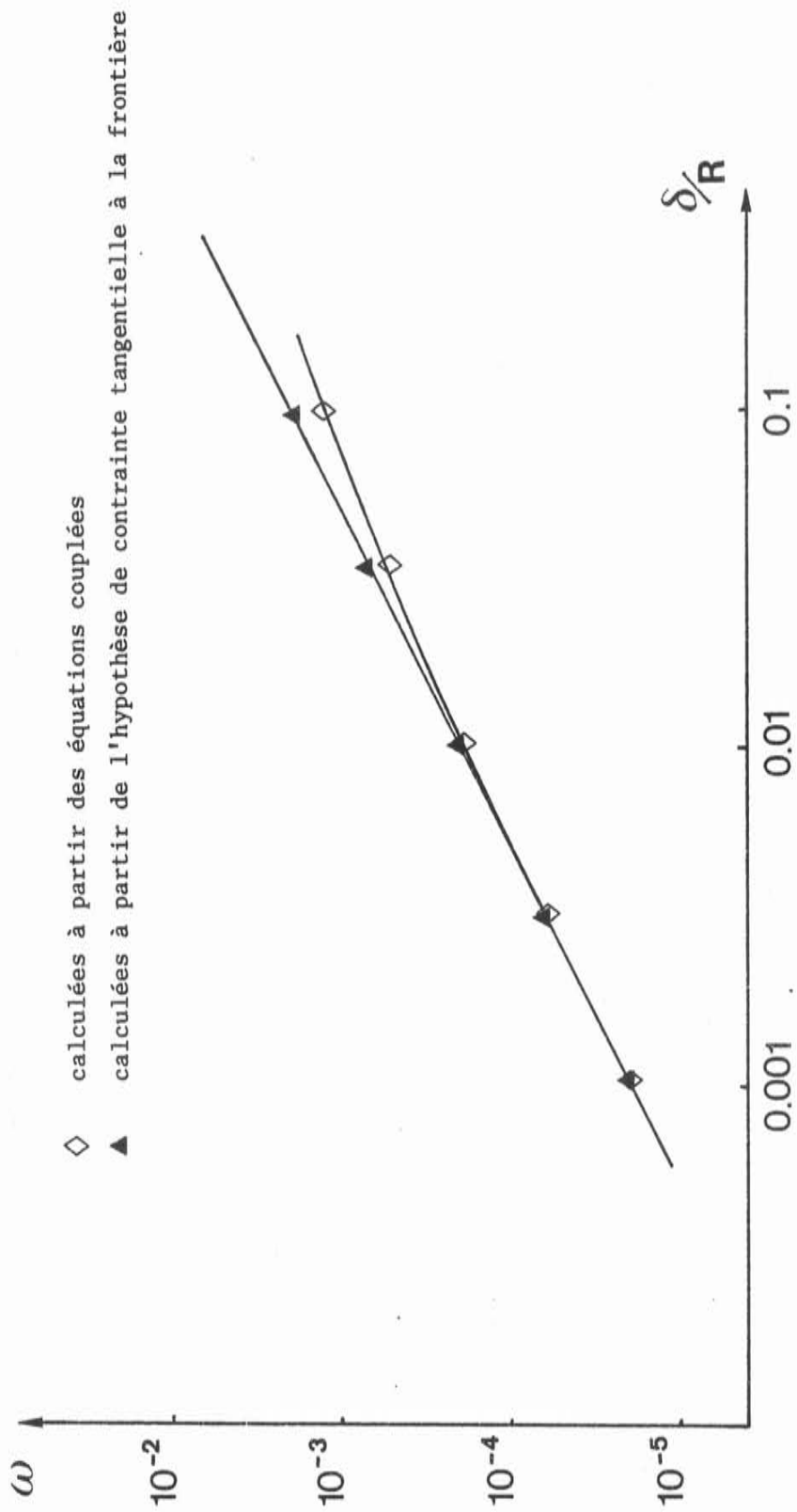
La condition  $\psi = \text{cte} = 0$  sur la surface libre restant inchangée.

Dans notre cas où la tension superficielle est élevée, la condition de contrainte tangentielle à la surface libre s'écrit :

$$\omega = \frac{-4\delta\mu_0 I^2}{\rho v \pi^2 R^2} \ell^4 (\ell^4 - 1)^2 \sin 4\theta \frac{1 + \ell^8 + 2\ell^4 (2 - \cos 4\theta)}{(1 + \ell^8 + 2\ell^4 \cos 4\theta)^3}$$

Les résultats, en fonction des paramètres fréquence et viscosité, présentent des variations sur l'évolution des vortex qualitativement identiques aux résultats des calculs avec équations découplées ou couplées. D'un point de vue quantitatif, plus l'épaisseur de peau électromagnétique est fine, plus les résultats se rapprochent de ceux obtenus par les équations couplées. Enfin, le schéma est convergent jusqu'à de grands nombres de Reynolds puisque la principale difficulté numérique (le terme de transport dans l'épaisseur de peau) est éliminée.

## COMPARAISON DES ISOVALEURS MAXIMALES DE LA VORTICITE

EN FONCTION DU RAPPORT  $\delta/R$ 

6 - Profilés cruciformes :

Pour une section profilée donnée, on peut écrire dans l'espace réel :

$$B_x - i B_y = \frac{dW}{dz}$$

où  $W$  est le potentiel complexe du champ magnétique que l'on calcule dans l'espace transformé autour du cylindre. On écrit alors :

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi(z)}{dz}$$

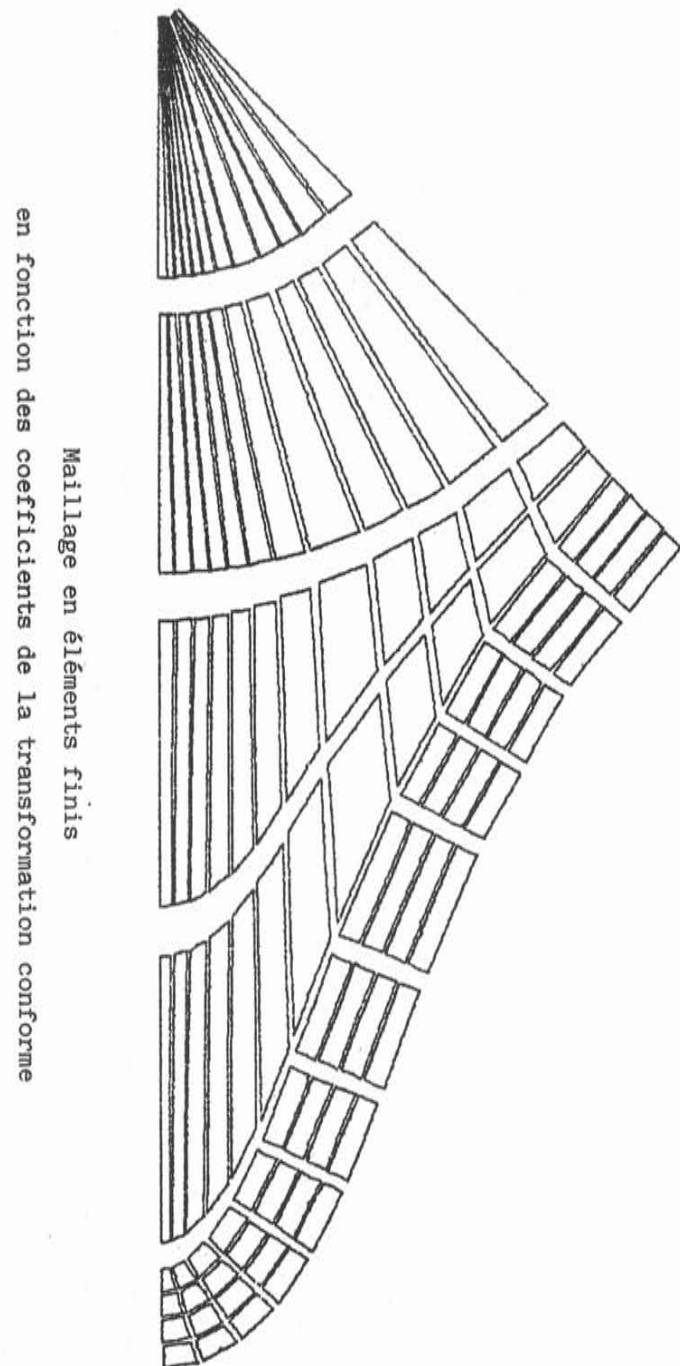
La transformation conforme  $z(\xi)$  -calculée dans le premier paragraphe- étant une fonction holomorphe, elle est dérivable en tout point de l'espace considéré dans  $C$  ; dans ce cas, la dérivée de la fonction inverse est égale à l'inverse de la dérivée de la fonction. Le champ est de la forme :

$$\frac{dW}{dz} = -2 \frac{\mu_0 I}{\pi} r_1^2 (r_1^4 - 1) \frac{\xi(1 - 1/\xi^4)}{1 + r_1^8 + r_1^4(\xi^4 + 1/\xi^4)} \cdot \frac{1}{C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 4n) C_n \xi^{-4n}}$$

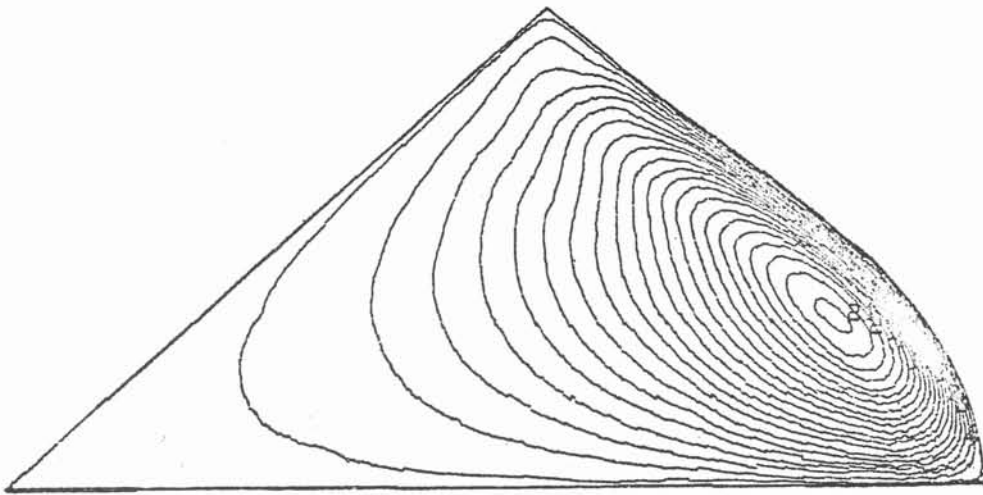
avec  $r_1 = |\xi_1|$  où  $\xi_1$  représente la position des conducteurs dans l'espace transformé.

On en déduit le champ de forces électromagnétiques appliquées à la surface libre et dans l'épaisseur de peau en fonction de la décroissance en  $e^{-2n/\delta}$  suivant la normale. "Flux Expert" en calcule le rotationnel pour obtenir le terme "moteur" de l'équation du tourbillon. Pour créer les éléments finis relatifs à chaque type de déformation de profilés et à chaque fréquence, on a mis au point un maillage automatique à partir des coefficients  $C_n$  de chaque transformation conforme.

Les résultats montrent la tendance à la concentration du vortex principal dans la partie allongée du profilé ; le vortex secondaire n'est pas dû directement au rotationnel des forces électromagnétiques mais provient de l'entraînement du vortex principal et correspond à un mouvement beaucoup plus faible.

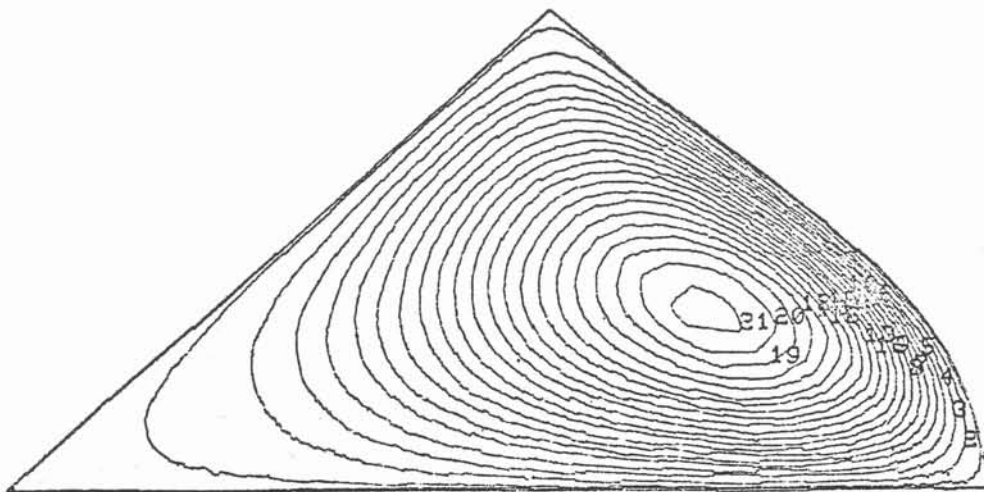


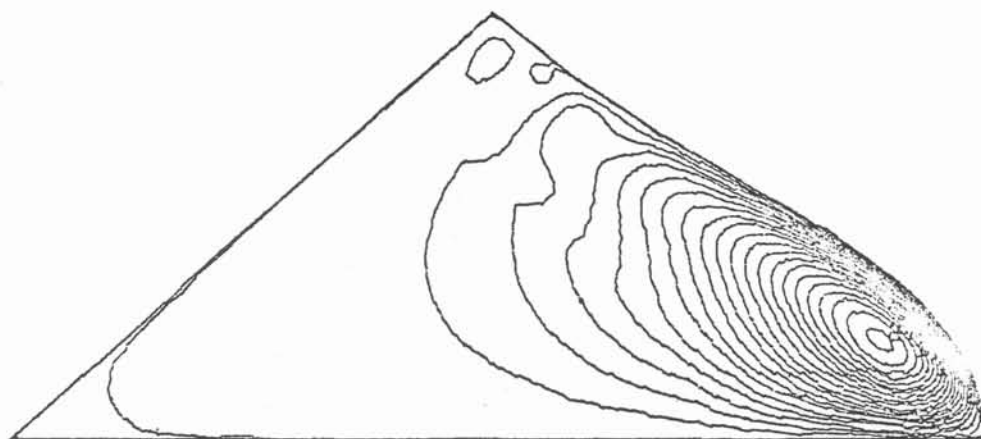




Isovaleurs de la vorticité  $\omega$   
 $\delta/R = 0.1$  ;  $k = 0.1$  ; équations couplées

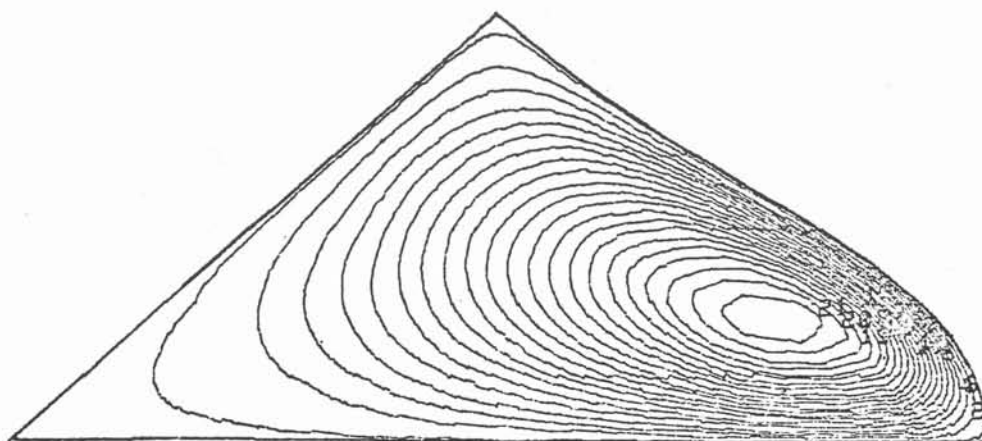
Isovaleurs de la fonction de courant  $\psi$



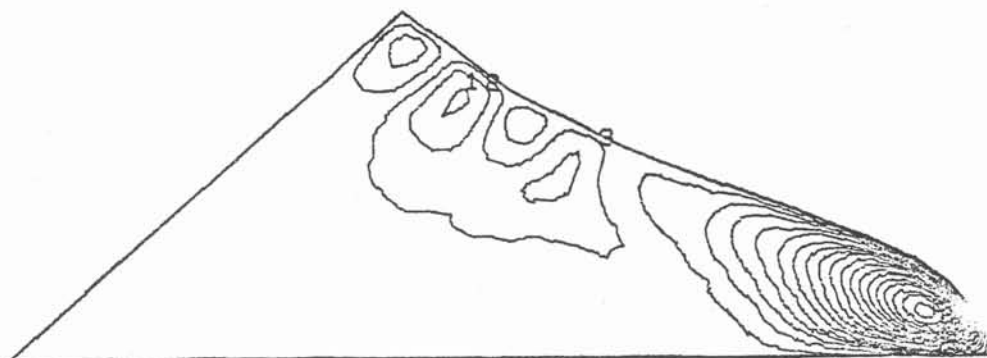


Isovaleurs de la vorticité  $\omega$   
 $\delta/R = 0.1$  ;  $k = 0.05$  ; équations couplées

Isovaleurs de la fonction de courant  $\psi$

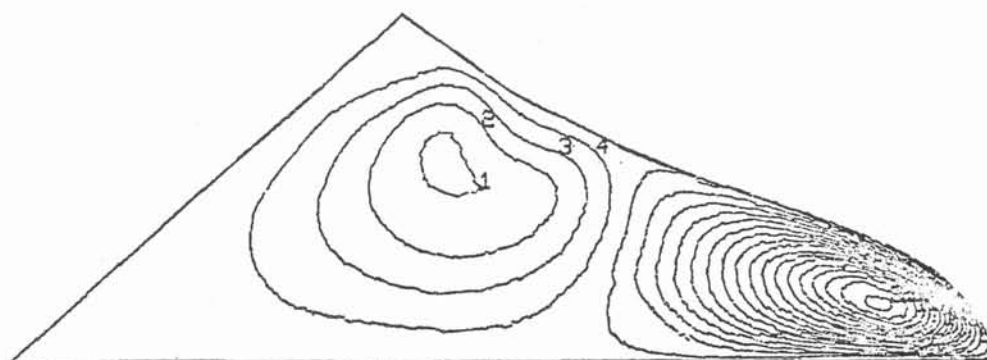






Isovaleurs de la vorticité  $\omega$   
 $\delta/R = 0.1$  ;  $k = 0.02$  ; équations couplées

Isovaleurs de la fonction de courant  $\psi$



7 - Conclusion :

L'approche numérique du mouvement induit par la partie rotationnelle des forces électromagnétiques dans le métal liquide doit nous permettre -dans l'avenir- de déterminer l'influence du mouvement sur le formage lui-même, par exemple dans le cas de la lévitation. Actuellement, la résolution des équations découplées ne pose pas de problèmes réels ; avec la taille mémoire disponible (512 kréels), il nous est possible de traiter des problèmes avec peau électromagnétique d'un rapport  $\delta/R = 0.001$  ; pour un champ de 400 Gauss à la périphérie de la veine métallique de rayon  $10^{-2}$  m, on obtient des vitesses sur la surface libre qui -ramenées à la vitesse d'Alfvén- sont de l'ordre de 0.35.

Pour les équations couplées, un maillage insuffisant à cause de la taille mémoire et une méthode de convergence parfois trop brutale ne permet pas de converger à de grands nombres de Reynolds. Plus qu'au nombre de Reynolds lui-même, le critère de convergence est relatif à un nombre de Reynolds Numérique défini sur les mailles d'éléments finis de dimension  $h$  par  $Ren = Vh/\nu$  et dont l'importance apparaît à l'intérieur de la peau électromagnétique  $\delta$ . L'hypothèse de Moffatt sur la contrainte tangentielle à la surface libre est tout à fait satisfaisante pour les faibles épaisseurs de peau ; de plus, elle permet de converger jusqu'à de grands nombres de Reynolds (dans notre cas  $Re_{max} = 500$ ). L'étude sur les sections déformées montre le déplacement du maximum de gradient de champ vers les extrémités.

Après l'augmentation des mémoires à plusieurs Mréels dans un avenir proche, les perspectives sont le couplage de l'équation du mouvement et de l'équation d'équilibre de la section ; à partir des solutions calculées en magnétostatique, on introduit les équations de Navier Stokes sur un maillage élément fini correspondant et on étudie les variations de la forme de la surface libre en fonction d'un critère supplémentaire : le mouvement.



# BIBLIOGRAPHIE

- (1) ETAY J., GARNIER M., "Sur le contrôle électromagnétique des surfaces libres", J.M.T.A., Vol. 1 n° 5, p. 911, 1982.
- (2) SHERCLIFF J.A., "Magnetic Shaping of molten metal columns. Proc. Roy. Soc. London, A375, 1981.
- (3) BRANCHER J.P., ETAY J., SERO-GUILLAUME O., "Formage d'une lame métallique liquide : calculs et expériences", J.M.T.A., Vol. 2, n° 6, p. 977, 1983.
- (4) SNEYD A.D., MOFFATT H.K., "Fluid dynamical aspect of the levitation melting process". J.F.M., Vol. 117, p. 45, 1982.
- (5) BRANCHER J.P., SERO-GUILLAUME O., "Sur l'équilibre des liquides magnétiques, application à la magnétostatique", J.M.T.A., Vol. 2, n° 2, p. 265, 1983.
- (6) BRANCHER J.P., de FRAMOND R., SERO-GUILLAUME O., "Shaping of liquid metal cylinders", 4th Beer Sheva Seminar on MHD, Feb. 25, 1984.
- (7) SERO-GUILLAUME O., "Sur l'équilibre des ferrofluides et des métaux liquides" Thèse D.E., INP Lorraine, 1983.
- (8) DELAGE D., ERNST R., "Prédiction de la répartition du courant dans un inducteur à symétrie de révolution destiné au chauffage par induction", "R.G.E.", Avril 1984.
- (9) DHATT G., KAMGA B., BOURQUE C., "A  $\psi$ - $\omega$  finite element formulation for the Navier Stokes equations", Int. Jour. Num. Meth. in Engin., Vol 17, p. 199, 1981.
- (10) BRATANOW T., ECER A., KOBISKE M., "Finite element analysis of unsteady incompressible flow around an oscillating obstacle of arbitrary shape", AIAA Journal, Vol. 11, n° 11, 1983.
- (11) MASSE Ph., "Modelling of continuous media methodology and CAO of finite element programs", Intermag Conference, April 10, Hamburg, 1984.
- (12) BIGEON J., "Contribution à la modélisation de structures électromagnétiques à courant de Foucault", Thèse D.I. INP Grenoble, 1983.
- (13) MASSE Ph., "Analyse méthodologique de la modélisation numérique des équations de la physique des milieux continus à l'aide de la méthode des éléments finis. Flux Expert : un système d'aide à la construction de logiciels", Thèse D.E. INP Grenoble, 1983.
- (14) BREVILLE Th., de FRAMOND R., BIGEON J., MASSE Ph., "Fluid motion induced by electromagnetic forces on free surfaces", I.E.E.E. Transactions on Magnetics, 1985.
- (15) MOFFATT H.K., "High frequency excitation of liquid metal systems", Metallurgical Applications of Magnetohydrodynamics, p. 180, Cambridge, 1982.
- (16) BATCHELOR G.K., "On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number", J.F.M., 1. p. 177, 1956.
- (17) SNEYD A.D. "Generation of fluid motion in a circular cylinder by an unsteady applied magnetic field", J.F.M., 49, p. 817, 1971.



C O N C L U S I O N .

---



L'étude présentée illustre sur un exemple précis les possibilités de continuité qui peuvent exister entre des études à caractère fondamental et des recherches finalisées susceptibles de conduire à des développements et à une exploitation industrielle.

En effet, à partir de l'analyse des possibilités de formage de veines métalliques liquides et de la capacité de certaines configurations de champs magnétiques à assurer une stabilité globale et locale de la surface libre, un inducteur a été conçu, réalisé et testé à froid avec du mercure. Les résultats obtenus permettent d'envisager la mise au point d'une technique nouvelle d'élaboration de métaux amorphes sous forme de bande mince. Cette possibilité protégée par un brevet déposé par la Société USINOR, sera exploitée et connaîtra des développements à caractère scientifique dans le cadre du Groupement Scientifique "Matériaux Amorphes". L'inducteur utilisé fait apparaître une distribution de champ magnétique originale qui comporte deux lignes de champ particulières le long desquelles le champ magnétique est nul. Ces deux lignes de champ parallèles sont contenues dans une surface de champ plane verticale confondue avec le plan de symétrie de l'inducteur. Une lame liquide ne peut être en équilibre dans une telle configuration que si son plan de symétrie coïncide avec celui de l'inducteur. A la stabilité globale ainsi obtenue, l'inducteur ajoute une stabilité locale, grâce à une distribution astucieuse des bobines inductrices qui permet d'éliminer l'anisotropie de l'effet stabilisant du champ magnétique.

Les expériences à froid avec le mercure sont très encourageantes et semblent confirmer les prédictions théoriques aussi bien que les espoirs d'applications. Il reste cependant, dans un but d'optimisation des inducteurs, à approfondir par une analyse expérimentale plus poussée les effets induits sur la stabilité et à caractériser les limites du dispositif. Cette analyse doit être menée à la fois avec le mercure sur une installation très instrumentée, mais aussi avec des métaux à haut point de fusion, éventuellement amorphisables, de façon à caractériser les effets produits sur le matériau solidifié.

Dans le cas du formage à l'état liquide de profilés cruciformes par un inducteur quadripolaire, la méthode utilisée consiste à rechercher une certaine fonctionnelle d'énergie à minimiser, en utilisant la méthode des images et les transformations conformes. Par la prise en compte des réactions





d'induit dans les conducteurs de section importante pour les dispositifs expérimentaux, un bon accord entre les déformations calculées et les mesures expérimentales est obtenu. Ce type de calcul est maintenant généralisable à d'autres formes de profilés, à condition de s'assurer que les transformations utilisées restent bien conformes au cours de la déformation des sections. De plus, il est envisagé d'introduire le problème des réactions d'induits par l'intermédiaire des éléments finis à partir des solutions calculées en magnétostatique.

Outre qu'elle teste et parfait le système "Flux Expert" dans des configurations d'équations jusqu'alors non exploitées, l'approche numérique du calcul de l'écoulement dans une section droite du profilé dépasse le problème du maillage des petites épaisseurs de peau. Elle bute sur la difficulté de résolution non linéaire en fonction du nombre de Reynolds du fait d'une taille mémoire pour l'instant trop faible. Elle compare avec succès pour les faibles épaisseurs de peau les résultats obtenus par un modèle à épaisseur de peau nulle où le terme moteur est remplacé par une condition aux limites sous forme de contrainte à la frontière libre. Enfin, elle montre l'évolution de l'écoulement en fonction de la déformation. L'avenir proche prévoit l'augmentation de la taille mémoire conduisant à la résolution des équations en termes couplés pour de plus grands nombres de Reynolds. Il est maintenant envisagé de coupler les équations du mouvement avec l'équation d'équilibre de la surface libre afin de déterminer l'influence du mouvement sur le formage, problème important dans les études en régime non transitoire, notamment dans le cas de la lévitation électromagnétique.

-----

A N N E X E

---



Organigramme détaillé du  
calcul de formage

-----



F : Calcul de l'énergie

Donnée :  $X = (x_1, \dots, x_n) = (c_3, c_7, \dots, c_{4n-1})$

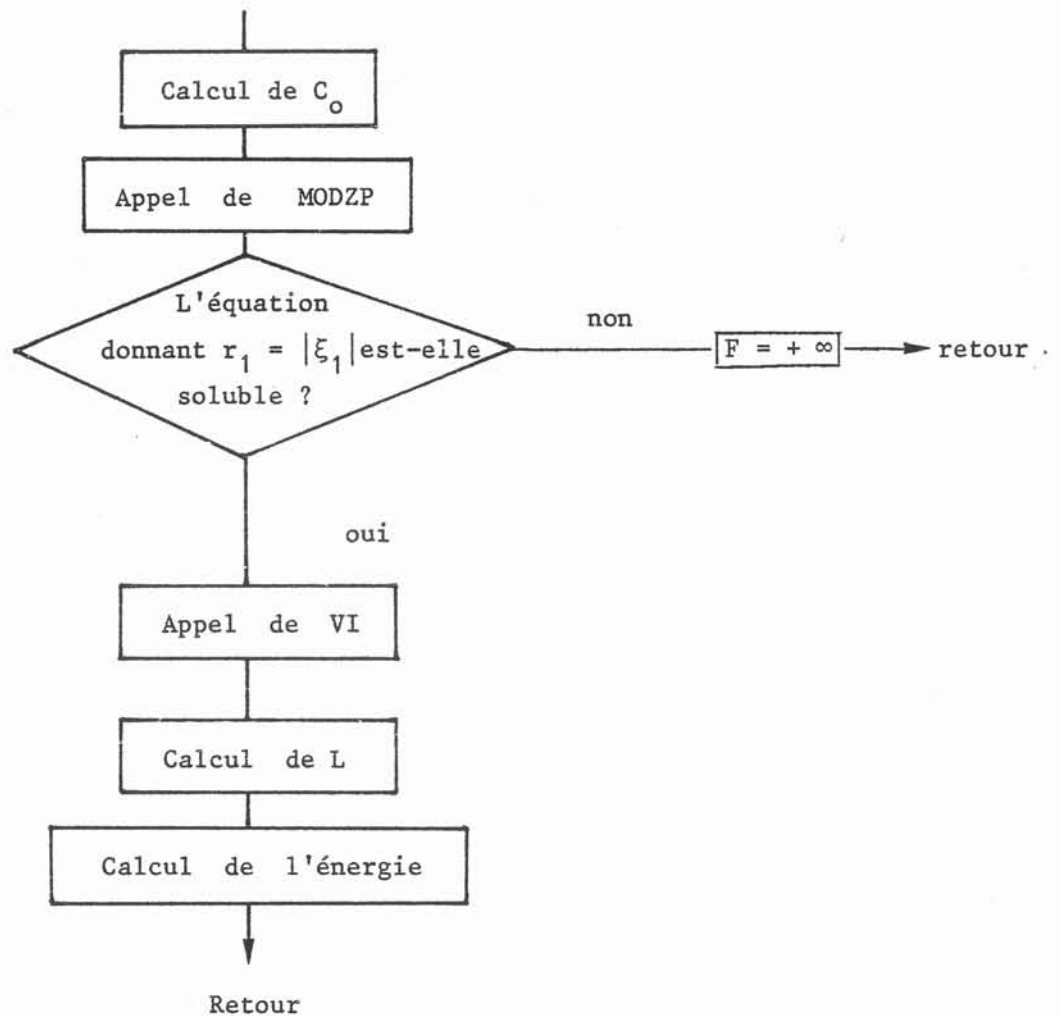
Résultat : énergie =  $F(X)$

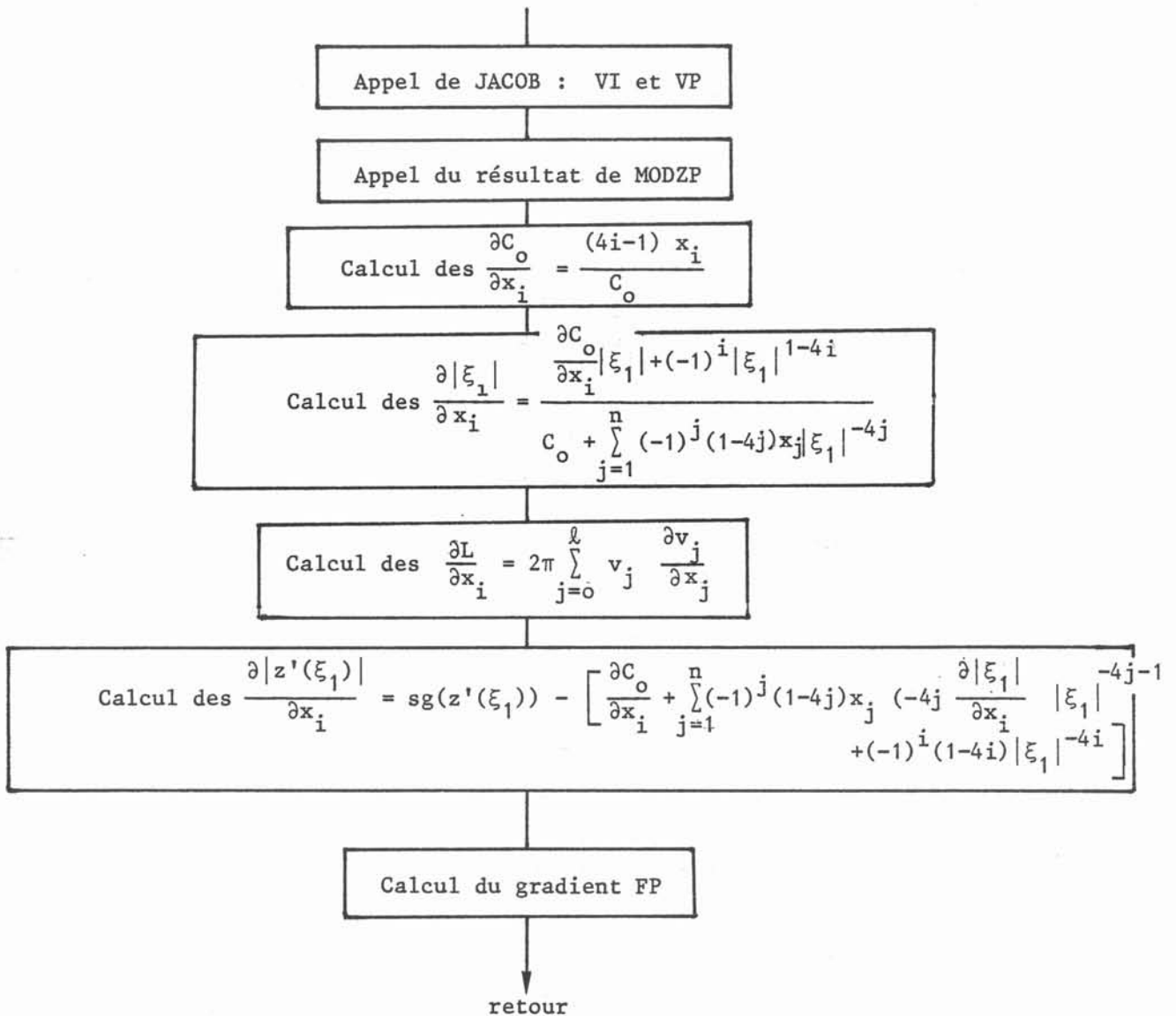
Lexique :  $\text{MODZP} = |Z'(\xi_1)|$

$\text{VI} = (v_0, v_1, \dots, v_\ell)$  avec  $L = 2\pi \sum_{n=0}^{\ell} v_n^2$

$\ell$  = indice maxi des  $v_i$  tel que  $\ell \geq n$  et  $v_\ell \ll 1$

$L$  = longueur de la courbe



FPRIME : Calcul du gradientDonnée :  $X, C_o$ Résultat :  $FP = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ Lexique :  $VP = \frac{DV}{DX}$ 



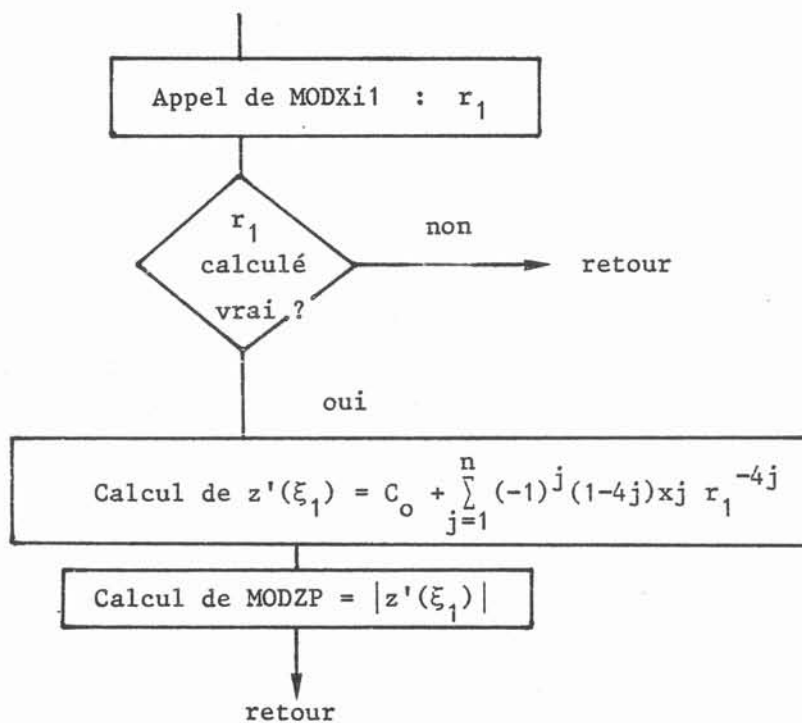
MODZP : Calcul de  $|z'(\xi_1)|$

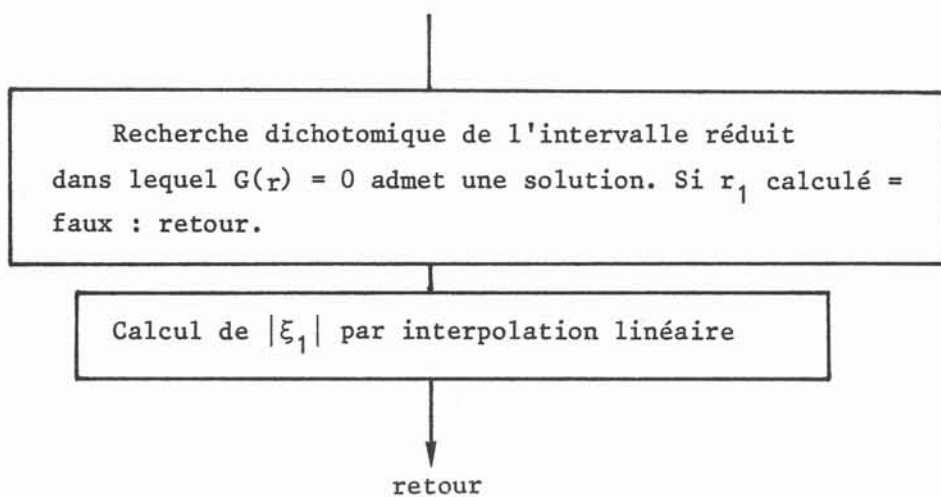
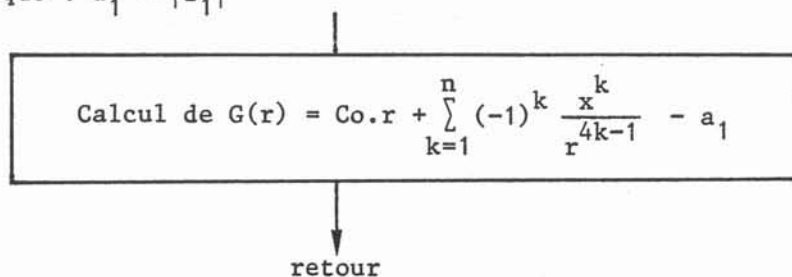
Données :  $C_0, X$

Résultats :  $|\xi_1|, z'(\xi_1), |z'(\xi_1)|$

Lexique :  $r_1 = |\xi_1|$

$r_1$  calculé = vrai  $\rightarrow$  l'équation donnant  $|\xi_1|$  est soluble

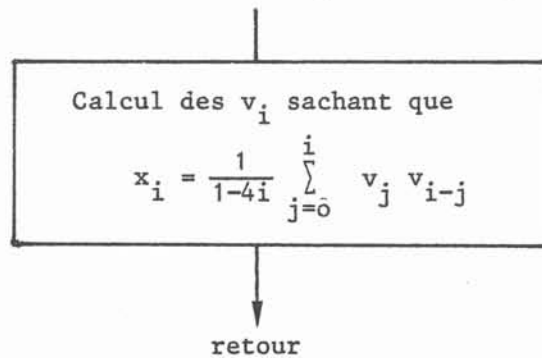


MODXi1 : Calcul de  $|\xi_1|$ Données :  $C_0, X$ Résultats :  $|\xi_1|$  calculé, MODXi1Lexique :  $r_1$  calculé = vrai si  $G(r) = 0$  admet une solution $G$  : fonction dont le zéro est  $|\xi_1|$ G : Calcul de la valeur de la fonction dont le zéro est  $|\xi_1|$ Données :  $r, C_0, X$ Résultat :  $G$ Lexique :  $a_1 = |z_1|$ 

# VI : Calcul des $v_i$

Données :  $C_0, X, \ell$

Résultat :  $V = (v_0, v_1, \dots, v_\ell)$



# JACOB : Calcul de la matrice jacobienne de l'application $X \rightarrow V$

Données =  $C_0, X, VI$

Résultats : VP     $VP(i+1, j+1) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

